# Játékelmélet

## Játékelmélet bevezetés

A játékelmélet korunk egyik modernek mondható területe, melynek alapjai - a hallgatók számára élvezetes módon - oktatható is. Fontos azért is mivel ennek kapcsán látható, hogy olyan területek is modellezhetőek, melyet a hallgatók nem is gondoltak volna. (PL. a közismert „kő-papír-olló” játék.) Jelentségét növeli az is, hogy magyar tudóst, Harsányi Jánost 1994-ben közgazdasági Nobel díjjal jutalmaztak játékelméleti eredményeiért, John Nash-el és Reinhard Selten-el megosztva. Szerencsés még oktatása azért is, mert – az általában a tanulmányokban korábban részletesen ismertetett - lineáris programozási problémára vezet, azonban nem triviális (kezdetekben nem kirívóan látható) módon. Valamint nemcsak érdekes, játékos, de napjainkban (természetesen a továbbfejlesztett modellek) alkalmazottak a piaci, politikai versenyben, de még inkább a kooperációban!

A játékelmélet bevezetését (az eladáson is) célszer néhány minta játék eljátszásával kezdeni, mivel ekkor válik nemcsak érthetvé, de kerülnek közelebb a hallgatókhoz a játékelmélet alapfogalmai, definíciói, reprezentációs technikái, célja. (Akiknek nincs szüksége ezen játékosabb bevezetésre, ezt a fejezetet átugorhatják.)

## Példajátékok és elemzésük

**Els példa játék:**

Tekintsük az alábbi kétszemélyes úgynevezett „páros-páratlan” játékot melynek szabályai a következek:
A játékosok nevei: „páros játékos” és „páratlan játékos”.
Mindketten (az egyszerség kedvéért csak) 1-tl 5-ig terjed számokat mondhatnak (ezek a tétjeik a játékban). Ha a mondott számok különbsége páros akkor a páros játékos nyer annyi forintot a páratlantól amennyi a két szám különbsége, ha páratlan akkor a páratlan kap a párostól szintén a különbségnek megfelel forintot. (Azonos tétek esetén a különbség nulla, vagyis egyik fél sem kap illetve fizet.)
Ennek egy tömör – bárki által a fenti információ alapján kitölthető táblázatos - reprezentálása az alábbi:
A táblázat els oszlopában álljanak a páros játékos tétjei (1 , 2 , 3 , 4 , 5 ) az els sorában pedig a páratlan játékosé (1 , 2 , 3 , 4 , 5 ).
Célszer a játékot - több fordulón keresztül - játszani valakivel, mivel a - nagyon egyszer, de fontos - fogalmak így válhatnak nemcsak érthetvé de rögzülhetnek is.

| | **Páratlan** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Páros** | **Tétek** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| | **1** | 0 | −1 | 2 | −3 | 4 |
| | **2** | −1 | 0 | −1 | 2 | −3 |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **3** | 2 | -1 | 0 | -1 | 2 |
| | **4** | -3 | 2 | -1 | 0 | -1 |
| | **5** | 4 | -3 | 2 | -1 | 0 |

**Páros - páratlan játék**

A táblázatban pedig az egymásnak fizetend összegek, még pedig a páros (vízszintes) játékos szempontjából. Elégséges ugye egyszer megjeleníteni az összegeket, mivel amit az egyik játékos kap, azt a másik fizeti.
Ez a továbbiakban is - és az egész világon is konvenció (megegyezés) hogy a kifizetés a mátrixban mindig a vízszintes játékos szempontjából kerül megadásra.

**Második példajáték:**

Közismert az úgynevezett „kő – papír – olló" játék, melynek szabályai az alábbiak: A tétek kő, papír illetve olló. Ha azonos tétek találkoznak, akkor senki sem fizet a másiknak, ha k találkozik olló téttel akkor „a kő kicsorbítja az ollót" vagyis a kő tétet tevő nyer. Ha kő papírral találkozik, akkor a „papír becsomagolja a követ" vagyis a papír tét nyer. Ha olló és papír a tét, az „olló elvágja a papírt" vagyis az olló nyer.
Ennek fizetési mátrixa az alábbi:

| Tétek | kő | papír | olló |
|---|---|---|---|
| **kő** | 0 | -1 | 1 |
| **papír** | -1 | 0 | -1 |
| **olló** | 1 | -1 | 0 |

**K - papír - olló  játék**

**Harmadik példajáték:**

Egy - korábban matematika tanári tanulmányokat is folytatott – színészhallgató az alábbi játékot ajánlja valamelyik osztálytársának. Minden nap más - a korábbi darabokból rájuk maradt - fejfedkkel jelenjenek meg az egyetemen. Attól függen kinek milyen fejfed van a fején adott mennyiség sört fizessenek egymásnak a büfében. Neki Napóleon kalapja, apáca fityulája és baseball sapkája van. A barátjának (elnyösnek feltntetve a több választási lehetséget) felajánlja, hogy négy fejfedt, katonasapka, páncél sisak, ni kalap illetve kend váltogathat. A szabályokat is elmondja: ha rajta napóleon kalap lesz a barátján pedig katonasapka, akkor  fizet 6 sört a barátjának. Ha a másikon páncélsisak akkor egyet, ha kend akkor négyet ha ni kalap akkor pedig kettt. Ha rajta baseball sapka lesz barátján pedig rendre katonasapka, páncél sisak, kend és ni kalap akkor rendre 3 , 0 , 6 illetve négy sört kap a barátja. Ha viszont  apáca fityulában jelenik meg akkor a barátja katona sapkában lévén kett, páncél sisak esetén egy, kend esetén három, ni kalap esetén pedig két sört fizet neki. Mindketten megfogadják, hogy a fenti alkoholon kívül többet nem fogyasztanak aznap.
A fenti téteket és fizetend sör mennyiségeket ismételten táblázatba (mátrixba) rendezve az alábbiakat kapjuk.

Elfogadja-e a barátja a játék ajánlatot, tisztességes-e ez a játék? Nem unalmas-e?

| Tétek | Katona sapka | Páncél sisak | Kend | Ni kalap |
|---|---|---|---|---|
| Napólen kalap | -6 | -1 | -4 | -2 |
| Baseball sapka | -3 | 0 | -6 | -4 |
| Apáca fityula | 2 | 1 | 3 | 2 |

**Színész hallgatók játéka**

Akár minden játékot célszer játszani, méghozzá addig amíg a játékosok kezdenek ráérezni a stratégiákra, vagyis hogy melyik tétet kell válasszák ahhoz, hogy nyerjenek, vagy legalább ne veszítsenek sokat!

## Elemezzük a játékokat:

**Els játék : (Pároátékokat:s-páratlan)**

Láthatóan kétszemélyes játékról beszélünk, melyben az egyik fél nyeresége a másik féltl származik. Ezt hívjuk „kétszemélyes zérusösszegű játéknak".
Ha megpróbáltuk játszani ezt a játékot tapasztalatunk az, hogy nem látszik tisztességtelennek, mivel nincs egyik játékosnak sem kirívóan látható elnye. Nincs olyan egyetlen tét mely mindig nyereséget eredményezne.

**Második játék: (K-papír-olló)**
Hasonlóan az elz esethez itt sem tudunk nyer stratégiát egyik félnek sem, st itt biztosak lehetünk benne hogy ugyanannyi esélye van nyerni az egyik játékosnak mint a másiknak mivel a szabályok, esélyek mindkettjük számára azonosak. (Szimmetrikus a mátrix, a játék pozíciók.)

**Harmadik játék: (Színészhallgatók fejfedi)**
Itt már természetes intelligenciával, logikával is találhatunk olyan stratégiát amely pl. a vízszintes játékos számára biztos nyerési esélyt jelent.
Ez pedig az „Apáca fityula" viselési stratégia. Mivel ekkor biztosan nem veszít a vízszintes játékos hanem minden játékban legalább egyet nyer. Ezt viszont tisztességtelennek ítélhetjük.

Definiáljuk most már ezek alapján ( a következ fejezetben) a játékelméletben használatos fogalmakat.

# Játékelméleti alapfogalmak

**Kétszemélyes zérusösszeg játék:**
Kétszemélyes zérusösszeg játékról beszélünk, ha a játékot ketten játsszák és az egyik nyereménye a másik játékostól származik. Ezért „zérus összegű”, nincsen bank, amely finanszírozná bármelyik fél nyereségét vagy elnyelné veszteségét.

**Fizetési mátrix:**
Fizetési mátrixnak pedig a fenti kifizetési táblázatok szürkével ki nem emelt részeit nevezzük, ahol a sorokban megjelenített az egyes vagy vízszintes játékos, az oszlopokban megjelenített pedig a kettes vagy függleges játékos. Célszer ezt a konvenciót (megegyezést) tartani, mivel ennek felcserélése konfúzióhoz (összezavarodáshoz) vezethet, valamint az egész világon így használják.

A fizetési mátrixnak annyi sora van ahány tét lehetsége, más szóval stratégiája, vagy még inkább tiszta stratégiája van az vízszintes, (I-es, pozitív) játékosnak.
Valamint annyi oszlopa ahány tét lehetsége a függleges, (II.-es, negatív) játékosnak. A mátrixban álló szám pedig eljelesen azt jelenti, hogy a vízszintes játékos mennyit kap (+) vagy fizet (-) a másik játékosnak.

**Stratégia:**
Stratégiának azt a döntéssorozat tervet nevezzük, mely a játék minden lehetséges döntéshelyzetére elír egy konkrét döntést.
Esetünkben (kétszemélyes zérusösszeg játék esetén) azt a szabályt (egyetlen tét alkalmazását vagy több fajta tét váltogatását) amellyel a játékos játszik a játék minden egyes szakaszában.
Játékosaink optimális stratégiáit az ellenfél racionális játékának feltételezése mellett keressük. (Vagyis mindkét fél maximálisan okos, a legjobb stratégiát választja.)
Feltételezzük még, hogy mindkét játékos nyerésre törekszik. (Nem enged pl. a gyermekének, hogy kedvet csináljon neki a játékhoz.)

**A játékelmélet célja:**
A játékelmélet célja a felek optimális stratégiáinak megtalálása, fenti feltételek esetén.
Vagyis megválaszolni, hogy az adott játékosnak milyen egyetlen tétet kell alkalmaznia vagy több tétet (adott arányban) váltogatnia a lehetséges maximális nyereség (vagy minimális veszteség) eléréséhez.

# Dominancia módszere

Dominancia módszere, és ennek alkalmazása az alábbi 4. példára:
Az első Fj4 mátrix láthatóan nem tisztességes játékot határoz meg, mivel a vízszintes játékos „a” tétje esetén nincs nyerési lehetsége a függleges játékosnak.
Részletesebben, az „a” stratégia az ellenfél minden egyes tétje esetén jobb a vízszintes játékos számára, mint a „c” stratégia. (4-et nyerni jobb mint 1-et veszíteni, 3-at nyerni jobb mint 2-t nyerni, 2-t nyerni jobb mint 2-t veszíteni és 3-at nyerni jobb mint 1-et nyerni.)

## 4. példa játék: (Fj4 mátrix)

| **Tétek** | **d** | **e** | **f** | **g** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 3 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 2 | 0 | −1 | 4 |
| **c** | −1 | 2 | −2 | 1 |

**4. példa**

Ezt nevezzük úgy, hogy az „a” stratégia dominálja a „c” stratégiát. Mivel mindkét játékost racionálisnak (okosnak) feltételeztük ezért ezt mindketten tudják. Vagyis a dominált (minden ellenfél tétre kedveztlenebb) sor elhagyható.

| **Tétek** | **d** | **e** | **f** | **g** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 3 | 2 | 3 |
| **b** | 2 | 0 | −1 | 4 |

**4. példa**

Most a sorok között nem találhatunk dominanciát, de folytathatjuk a függleges játékos szemszögébl is, vagyis az oszlopokkal. A függleges játékosnak a negatív (minél kisebb) számok jelentik a nyereséget, kisebb veszteséget. Ezért például az „f” tét számára a vízszintes játékos bármely tétje esetén kedvezőbb mint a „e” tét. Vagyis a „e” tét oszlopát is elhagyhatjuk – mert racionális (okos) játékos lévén sosem fogja a függleges játékos játszani. (Kettt veszíteni jobb mint hármat veszíteni egyet nyerni jobb mint nem nyerni.)

| **Tétek** | **d** | **f** | **g** |
|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 2 | 3 |
| **b** | 2 | −1 | 4 |

**4. példa**

Ugyanígy dominálja az „f” stratégia a „d”-t és az „g”-et is.
(Kettt veszíteni jobb mint 4-et veszíteni, egyet nyerni jobb mint 2-t veszíteni. Valamint Kettt veszíteni jobb mint hármat veszíteni, 1-et nyerni jobb mint 4-et veszíteni.)
Vagyis a függőleges játékos számára a legkedvezőbb az „f” stratégia ezért mindig ezt fogja játszani.

| **Tétek** | **f** |
|---|---|
| **a** | 2 |
| **b** | −1 |

**4. példa**

Ezt azonban – a szintén racionális – vízszintes játékos is átlátja, és mindig az „a” stratégiát fogja alkalmazni. Vagyis a játék menete – optimális stratégiák alkalmazása esetén az alábbi lesz:

1.„a” , „f” kifizetés = +2.
2.„a” , „f”  kifizetés = +2.
.
.
.
n.  „a” , „f”  kifizetés = +2.

Ami nemcsak unalmas, de nem is tisztességes, mivel csak a vízszintes játékosnak van nyerési esélye játékonként ("átlagosan") 2 egység. Ezt hívjuk a játék értékének.
(Eredményünket, az optimális stratégiákat és a játék értékét már az eredeti mátrixban sárgával jelöltük.)

**A játék értéke:**
Az egy játékonkénti átlagos nyereség vagy veszteség.

Mj 1: A dominált stratégiákat a papíron történ munka esetén kihúzással szoktuk jelölni.
Mj2: Az interaktív részben stratégia összehasonlító eljárás mellett törlési eljárás is található, mely megkönnyíti a munkát.

## A dominancia módszerének alkalmazása az 5-ös példára:

A 3. oszlop („f” stratégia) minden más oszlopot dominál, vagyis minden más oszlop kihúzható. Ebben pedig a harmadik elem a „c” stratégiánál található -1 legnagyobb. Ezért v = -1 Szintén tisztességtelen a játék, de most a függleges játékosnak van nyer esélye.

Az optimális - tiszta - stratégiák:
 Vízszintes játékos: c
 Függleges játékos: f
 Játék értéke: -1

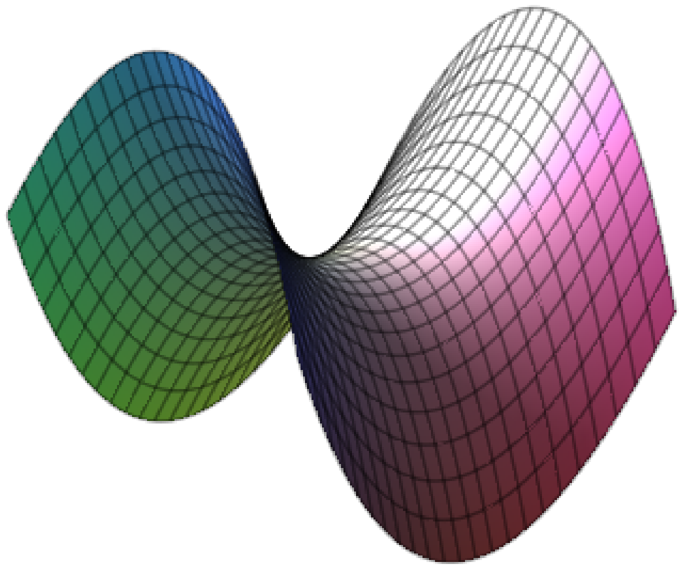
| **Tétek** | *d* | *e* | ***f*** | *g* |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 4 | 3 | −2 | 3 |
| ***b*** | 2 | 2 | −3 | 4 |
| ***c*** | 0 | 3 | −1 | 6 |

**5. példa**

Ezen optimális stratégiák keresztezdési pontjában álló helyeket a játék nyeregpontjának hívjuk az alábbiak miatt:
A nyeregpont olyan tulajdonságú pont, mely az egyik koordináta irány szerint minimális, a másik szerint pedig maximális. Ilyen az alábbi ábrán látható nyeregnek is a középs pontja.

Ábra 1: Nyeregfelület

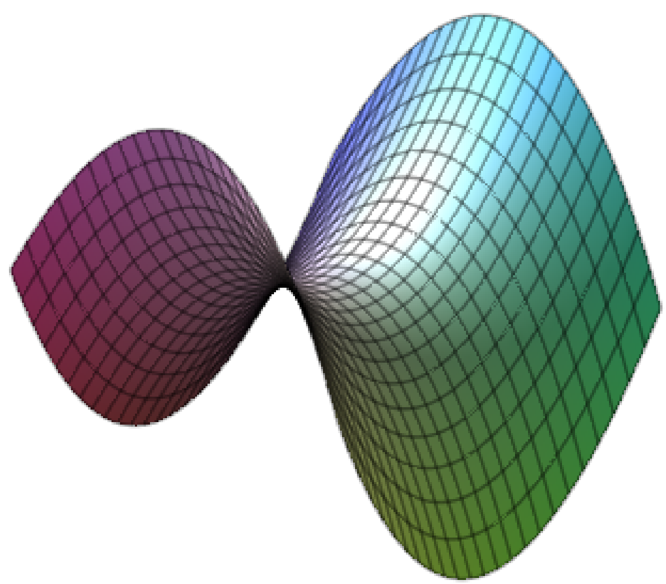
$with(plots)$ :
$f := x \cdot x - y \cdot y$ :
 $plot3d(f, x = -4..4, y = -4..4)$;



Vagy animáltam megjelenítve, hogy a felület keletkezése jobban látható legyen:

$animate(\ plot3d,\ [\ k \cdot x\text{^}2 - \ k \cdot \ y\text{^}2, x = -10\ ..10, y = -10\ ..10\,], k = 0\ ..2\ \ );$

$k = 2.0000$



Láthatóan egyik irányban felfelé hajlítottuk a sik lapot a rá merleges irányban pedig lefelé.
Ha a kifizetési mátrixnak van stabil nyeregpontja, akkor a játéknak tiszta stratégiái vannak.

## A dominancia módszer alkalmazása a 6-os példára:

Ezen – nagyon egyszerű, kis dimenziós – példában egyetlen stratégia sem dominálja a másikat. Például a vízszintes játékos "a" stratégiája csak az ellenfél "d" stratégiája esetén jobb, "e" esetén rosszabb. Hasonlóan a többi stratégiákra is.

| **Tétek** | **d** | **e** |
|---|---|---|
| ***a*** | −1 | 2 |
| ***b*** | 3 | −4 |

**6. példa**

Ezen esetet majd a kevert stratégiák meghatározásának módszerével tudjuk majd kezelni.
De elbb látunk egy másik módszert ( a következ fejezetben) az optimális stratégiák meghatározására.

Lássunk végül egy kicsit "bonyolultabb" több sor és oszlop dominanciát igényl példát az interaktív fejezetben szerepl sor és oszlop összehasonlítás és törlés eljárások használatával.

A feladat kifizetési mátrixát az alábbi Maple ablakban adhatjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & -2 & 9 \\ -7 & 2 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Beolvasás: ( A stratégiák elnevezése a beolvasó eljárás által automatikusan kerül megadásra.)

*dominancyInput1*( );

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_3 & j2_4 & j2_5 \\ i1_1 & 8 & 4 & 0 & -2 & 9 \\ i1_2 & -7 & 2 & -6 & 1 & 4 \\ i1_3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ i1_4 & -6 & -1 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

Oszlop dominancia vizsgálat:

$columnCompare(j2_1, j2_5)$;

$$\text{" A "}, j2_1, \text{" oszlop dominálja a"}, j2_5, \text{" oszlopot"} \quad \textbf{(4.2)}$$

A dominált oszlop törlése:

$columnDelete(j2_5)$;

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_3 & j2_4 \\ i1_1 & 8 & 4 & 0 & -2 \\ i1_2 & -7 & 2 & -6 & 1 \\ i1_3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ i1_4 & -6 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \text{""} \quad \textbf{(4.3)}$$

Sor dominancia vizsgálat:

$rowCompare(i1_2, i1_3);$

$$\text{" A "}, i1_3, \text{" sor dominálja a"}, i1_2, \text{" sort"} \tag{4.4}$$

A dominált sor törlése:

$rowDelete(i1_2);$

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_3 & j2_4 \\ i1_1 & 8 & 4 & 0 & -2 \\ i1_3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ i1_4 & -6 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \text{""} \tag{4.5}$$

Oszlop dominancia vizsgálat:

$columnCompare(j2_3, j2_4);$

$$\text{" A "}, j2_4, \text{" oszlop dominálja a"}, j2_3, \text{" oszlopot"} \tag{4.6}$$

A dominált oszlop törlése:

$columnDelete(j2_3);$

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_4 \\ i1_1 & 8 & 4 & -2 \\ i1_3 & 2 & 3 & 2 \\ i1_4 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{""} \tag{4.7}$$

Sor dominancia vizsgálat:

$rowCompare(i1_3, i1_4);$

$$\text{" A "}, i1_3, \text{" sor dominálja a"}, i1_4, \text{" sort"} \tag{4.8}$$

A dominált sor törlése:

$rowDelete(i1_4);$

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_4 \\ i1_1 & 8 & 4 & -2 \\ i1_3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{""} \tag{4.9}$$

Oszlop dominancia vizsgálat:

$columnCompare(j2_1, j2_4);$

$$\text{" A "}, j2_4, \text{" oszlop dominálja a"}, j2_1, \text{" oszlopot"} \tag{4.10}$$

A dominált oszlop törlése:

$columnDelete(j2_1)$;

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_2 & j2_4 \\ i1_1 & 4 & -2 \\ i1_3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, "" \tag{4.11}$$

Oszlop dominancia vizsgálat:

$columnCompare(j2_2, j2_4)$;

$$\text{" A "}, j2_4, \text{" oszlop dominálja a"}, j2_2, \text{" oszlopot"} \tag{4.12}$$

A dominált oszlop törlése:

$columnDelete(j2_2)$;

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_4 \\ i1_1 & -2 \\ i1_3 & 2 \end{bmatrix}, "" \tag{4.13}$$

Sor dominancia vizsgálat:

$rowCompare(i1_1, i1_3)$;

$$\text{" A "}, i1_3, \text{" sor dominálja a"}, i1_1, \text{" sort"} \tag{4.14}$$

A dominált sor törlése:

$rowDelete(i1_3)$;

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_4 \\ i1_1 & -2 \end{bmatrix}, "" \tag{4.15}$$

Fenti példában a sorokat és oszlopokat hasonlítottunk össze és a domináltakat töröltük.
A feladat stabil nyeregponttal rendelkezik az optimális - tiszta - stratégiák az $i1_1$ és $j2_4$ .

Megjelenítve az eredeti mátrixot és benne pirossal és félkövérrel kiemelve a játék értékét:

$$\begin{bmatrix} j2_0 & j2_1 & j2_2 & j2_3 & j2_4 & j2_5 \\ i1_1 & 8 & 4 & 0 & \mathbf{-2} & 9 \\ i1_2 & -7 & 2 & -6 & 1 & 4 \\ i1_3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ i1_4 & -6 & -1 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

# Minimax módszer

Ezen módszer éppen a fenti nyeregpont gondolatra épít.
Abból indul ki, hogy ha az egyik játékos valamely tiszta stratégiát alkalmaz, akkor az ellenfél – kihasználva az adott tiszta stratégia számára adott lehetőségeit – a számára legkedvezőbb stratégiát választja. Ez a veszteség minimalizálás elve, ami racionális gondolat!

## 7. példa:

| Tétek | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|
| **a** | -2 | -3 | 3 | 5 |
| **b** | **0** | 4 | 1 | 2 |
| **c** | -1 | -3 | 2 | -1 |

**7. példa**

Minimax módszer a 7. példára:
Ha a vízszintes játékos minden játékban az „a” stratégiát alkalmazza, akkor a függőleges játékosnak (nyeresége maximalizálása okán) az „e” tiszta stratégiát célszerű alkalmazni, mikor is 3-at nyer. ($v_e$= -3). Ha a vízszintes játékos a „b” tiszta stratégiát alkalmazza akkor a II-es játékosnak az „d” az optimális stratégia ($v_d$= 0). „c” esetén pedig ismét az „e” ($v_e$= -3).
Ekkor az I-es játékos veszteségminimalizáló célját tekintve célszerű a b tiszta stratégiát alkalmaznia – mert ekkor veszít okos ellenfele ellen - a legkevesebbet, nullát, semmit.  (Ez a legkisebb negatív szám, vagy a legnagyobb pozitív - ha ilyen lenne.)

| Tétek | d | e | f | g | Mi\ | Ma\ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a*** | -**2** | -3 | 3 | 5 | -3 | |
| ***b*** | **0** | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| ***c*** | -**1** | -3 | 2 | -1 | -3 | |

**7. példa**

Hasonlóan elvégezhetjük ezt a vizsgálatot a II-es játékos tiszta stratégiáinak esetére.
„d” esetén az I-es játékosnak „b”-t célszerű választania ($v_b$ = 0 ) , „e” tiszta stratégia esetén szintén "b"-t ($v_b$ = 4), „f” esetén $v_a$ = 3 a maximálisan elérhető nyereség, „g”esetén pedig $v_a$ = 3 ahogy azt az alábbi táblázatban is felírtuk.

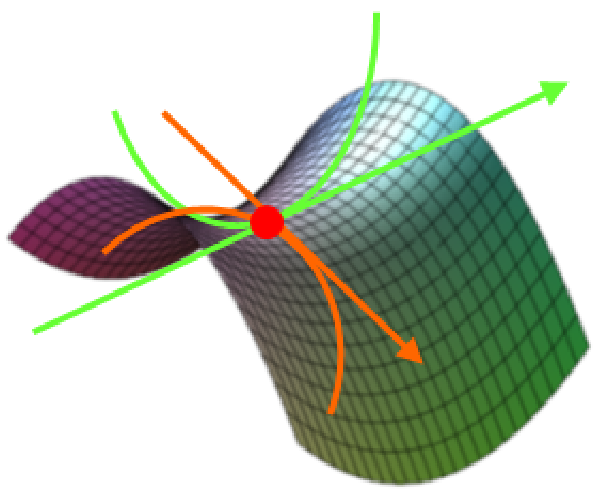
| Tétek | **d** | e | ***f*** | ***g*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | **-2** | -3 | 3 | 5 |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***b*** | **0** | 4 | 1 | 2 |
| ***c*** | **-1** | -3 | 2 | -1 |
| Max. | **0** | 4 | 3 | 5 |
| Min. | **0** | | | |

**7. példa**

A II játékos veszteségminimalizáló célját tekintve számára a legkedvezőbb tiszta stratégia a"d". A fenti módszer technikailag azt jelenti, hogy a sorokban a minimumot, majd a minimumok maximumát keressük, amely szükségszeren a nyeregfelület egyik irányú pontjának szükséges tulajdonsága, és fordítva az oszlopokban a maximumok minimumát - ami a nyereg másik irányú nyeregpontjának szükséges tulajdonsága.

Nyeregpont a nyeregfelületen



Ha mindkét játékos a „minimax" módszer által szolgáltatott stratégiákat „d" és „b" alkalmazza akkor az egy játékbeli kifizetés (vagyis a játék értéke) nulla lesz. Vagyis senki se nem nyer, se nem veszít. Úgy is mondhatjuk, hogy a stratégiák „kereszteződésében" nulla áll. Ez egy nyeregpont gyanús hely. Meg kell még vizsgálnunk, hogy ez tényleg a sorban a minimumot, oszlopban pedig a maximumot jelenti-e. Vagyis azt, hogy érdeke-e bármelyik játékosnak elhagyni ezt a pontot. Azt találjuk hogy nem érdeke egyiknek sem, mert bárki kilépne, más stratégiát alkalmazni - miközben az ellenfele

ugyanazt - akkor veszteséget könyvelhetne el.
Ez a pont tényleg a minimum elemek maximuma és a maximum elemek minimuma. (Ez nem mindig teljesül mint azt a további példákban látni fogjuk.)

**Összefoglalva:** Az I. játékos akkor veszít a legkevesebbet, ha „b" tétet alkalmaz minden játékban, a II. játékos pedig akkor veszít a legkevesebbet, ha „d"-t. A játék értéke: v=0, tisztességes a játék, csak unalmas…..
Ez egy stabil nyeregponttal, vagyis a játék szempontjából tiszta stratégiákkal rendelkez játék volt.

E miatt nevezzük ezt a módszert "minimax" módszernek, mivel a minimumok maximumának (és a maximumok minimumának) meghatározásán alapul.

További ( a korábbi) példák elemzése minimax módszerrel:

**A 4. példa elemzése minimax módszerrel:**
A minimax értékeket a fizetési mátrix alatt, mellett szerepeltetjük:

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** | Min. | Max. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | **4** | **3** | **2** | **3** | **2** | **2** |
| **b** | 2 | 0 | -1 | 4 | -1 | |
| **c** | -1 | 2 | -2 | 1 | -2 | |

**4. példa**

Az I-es játékos minimális veszteségét az „a" stratégia biztosítja - a minimax módszer javaslata szerint.

| **Tétek** | ***p*** | ***q*** | ***r*** | ***s*** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 3 | **2** | 3 |
| **b** | 2 | 0 | **-1** | 4 |
| **c** | -1 | 2 | **-2** | 1 |
| Max. | 4 | 3 | **2** | 4 |
| Min. | | | **2** | |

**4. példa**

a II-es játékos minimális veszteségét pedig - szintén a minimax módszer javaslata szerint - az az „r" stratégia biztosítja. Ha mindkét játékos ezeket a tiszta stratégiákat alkalmazza akkor a játék az ( a , r ) -> v = 2 és ( a , r ) -> v = 2 és ( a , r ) -> v = 2 .... tétekbl, fizetésekbl fog állni.
(Mivel a javasolt stratégiák keresztezdésében a 2-es kifizetés áll.) Megvizsgálva láthatjuk, hogy ez tényleg a maximumok minimuma és a minimumok maximuma – vagyis egyik játékosnak sem érdeke

elhagyni ezt a pontot. Stabil nyeregponttal, tiszta optimális stratégiákkal rendelkez játékunk van. (Az oszlopban negatív elemek állnak, ezeket a vízszintes játékos nem választja, mert akkor fizet, a sorban pedig csak nagyobb pozitívak, ezeket pedig a függleges játékos nem választja, mert akkor még többet vesztene. Mindig a másik játékos tétjének rögzítése mellett vizsgálódtunk és ne feledjük, hogy mindkét játékosnak csak a saját tétjeit illeten van választási lehetősége.)
Láthatóan ez a módszer kevésbé fáradtságos mint a dominancia módszer.

**Az 5. példa elemzése minimax módszerrel:**

Ismételten a mátrix mellett jelenítjük meg a minimax értékeket.

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** | Min | Max. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 3 | -2 | 3 | -2 | |
| **b** | 2 | 2 | -3 | 4 | -3 | |
| **c** | -1 | 3 | -1 | 6 | -1 | -1 |

**5. példa**

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 4 | 3 | -2 | 4 |
| **b** | 2 | 2 | -3 | 2 |
| **c** | -1 | 3 | -1 | 3 |
| Max. | 4 | 3 | -1 | 4 |
| Min. | | | -1 | |

**5. példa**

Itt is láthatóan -1 áll a két – a minimax által javasolt – stratégia kereszteződésében és ez ténylegesen stabil nyeregpont.
Eredményeink egyezek a dominancia módszerrel kapott eredményekkel. A játék nem tisztességes, most a "függleges" játékosnak van nyerési esélye.

A 6-os feladat elemzése teljesen hasonló lenne ezért ezt nem végezzük el.

**A 8. példa és elemzése minimax módszerrel:**

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 2 | -2 | 3 | 4 |
| **b** | -1 | 4 | 1 | 1 |
| **c** | 1 | -3 | 2 | -1 |

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** | Min | Max. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 2 | −2 | 3 | 4 | −2 | |
| **b** | **−1** | **4** | **1** | **1** | **−1** | **−1** |
| **c** | 1 | −3 | 2 | −1 | −3 | |

**8.**

A minimax módszer javaslata a „b” (felül kiszámított) illetve a „p” (alul kiszámított) stratégia.

| **Tétek** | **p** | **q** | **r** | **s** |
|---|---|---|---|---|
| **a** | **2** | −2 | 3 | 4 |
| **b** | **−1** | 4 | 1 | 1 |
| **c** | **1** | −3 | 2 | −1 |
| Max. | **2** | 4 | 3 | 4 |
| Min. | **2** | | | |

**8.**

A minimax módszer nyeregpont javaslata a "b" és "p" stratégiák keresztezdésében álló -1 -es érték. Ennek stabilitását vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a II. játékosnak nem érdemes kilépnie, hiszen akkor egységnyi nyeresége helyett vesztene. Az I -es játékosnak azonban célszerű átlépnie az „a” stratégiára, mivel ekkor egységnyi veszteség helyett 2 egységnyi nyereséget tud realizálni. Azonban ha ő áttér az „a” stratégiára akkor – a szintén racionális – II-es játékos áttér az „q” stratégiára, mivel azzal tud két egységnyi nyereséget realizálni. Ekkor viszont az I-es játékos veszi észre, hogy veszteség helyett lehetősége van nyereséget realizálni a „b” stratégia alkalmazásával.

Egy példa játék menete:

**I. II. kifizetés:**
1.„b” , „p” -1
2.„b” , „p” -1
3.„a” , „p” +2
4.„a” , „p” +2
5.„a” , „q” -2
6.„a” , „q” -2
7.„b” , „q” +4
8.„b” , „q” +4
9.„b” , „p” -1
10.„b” , „p” -1
stb...

Ezen stratégiákat összefoglalhatjuk egy kisebb kifizetési mátrixban:

| Tétek | p | q |
|---|---|---|
| a | 2 | -2 |
| b | -1 | 4 |

**8.**

Ennek a „redukált mátrix" által leírt játéknak a kifizetési mátrixának vizsgálatával majd a következő fejezetben foglalkozunk.
Ugyan ezen eredményre jutottunk volna a dominancia módszerrel is ahogy azt az alábbiakban bemutatjuk.
A félkövérrel kiemelt stratégia dominálja a szürke karakterekkel felírtat. Els lépésben az "a" sor a "c" sort.

| Tétek | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|
| a | **2** | **-2** | **3** | **4** |
| b | **-1** | **4** | **1** | **1** |
| c | 1 | -3 | 2 | -1 |

**8.**

Majd ha már ezt elhagyjuk akkor a "p" oszlop dominálja mind az "r" mind az "s" oszlopot.

| Tétek | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|
| a | **2** | **-2** | 3 | 4 |
| b | **-1** | **4** | 1 | 1 |

**8.**

További dominanciát nem találunk. Vagyis ténylegesen ugyanazt az "al"-fizetési mátrixot kapjuk eredményül.

**9. példa és elemzése minimax módszerrel:**

| Tétek | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|
| a | 2 | -2 | 3 | 4 |
| b | 0 | 4 | -1 | 1 |
| c | 1 | -3 | 5 | -1 |

**9.**

| Tétek | *p* | *q* | *r* | *s* | Min | Max. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 2 | -2 | 3 | 4 | -2 | |
| ***b*** | **0** | **4** | **-1** | **1** | **-1** | **-1** |
| *c* | 1 | -3 | 5 | -1 | -3 | |

**9.**

A minimax módszer javaslata a „b” (felül kiszámított) illetve a „p” (alul kiszámított) stratégia, vagyis a nullát jelöli meg nyeregpont gyanús helyként.

| Tétek | ***p*** | *q* | *r* | *s* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | **2** | -2 | 3 | 4 |
| *b* | **0** | 4 | -1 | 1 |
| ***c*** | **1** | -3 | 5 | -1 |
| Max. | **2** | 4 | 5 | 4 |
| Min. | **2** | | | |

**9.**

A "0"-ás pont stabilitását vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a II. játékosnak a „r” stratégiába érdemes kilépnie, hiszen ekkor nulla helyett 1 egységnyi nyereséget tud realizálni. Az I-es játékosnak pedig az „a” stratégiára, mivel ekkor nulla helyett 2 egységnyi nyereséget tud realizálni.
Folytatva az elemzést az „a” stratégiára történő kilépéssel a II. játékos vált az „q” stratégiára, majd az I-es vissza a „b”-re. Ekkor kiléphet a II-es játékos az „r”-re mikor is átlép az I-es játékos az „a”-ra….
Vagyis az I-es játékosnak az „a” és a „b” stratégiát érdemes váltogatni, míg a II-esnek a „q” -t és „r” -et.
Érdekessége ennek - az elzhöz képest - hogy most az az eredetileg nyeregpont gyanús helynek javasolt kifizetés nem is szerepel az optimális kevert stratégiák között!
Az almátrix mely ezt a játékot leírja:

| **Tétek** | **q** | **r** |
|---|---|---|
| **a** | -2 | 3 |
| **b** | 4 | -1 |

**9.**

Egy példa játék menete:

**I.  II.  kifizetés:**
1.„b” , „p”  0
2.„b” , „p”  0
3.„a” , „p”  +2
4.„a” , „p”  +2
5.„a” , „q”  -2

6.„a” , „q”     -2
7.„b” , „q”     +4
8.„b” , „q”     +4
9.„b” , „r”    -1
10.„b” , „r”    -1
11.„a” , „r”     3
12.„a” , „r”     3
13.„a” , „p”     -2
stb...

Próbáljuk meg most is az eredeti feladatból dominanciával megkapni a csak az optimális kevert stratégiákat tartalmazó almátrixot.

| Tétek | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|
| a | 2 | -2 | 3 | 4 |
| b | 0 | 4 | -1 | 1 |
| c | 1 | -3 | 5 | -1 |

**9.**

Sor dominancia láthatóan nem lehetséges, mert az "a" stratégia nem jobb mint a sem a "b" sem a "c". Oszlop dominanciát sem találhatunk "p" nem dominál egyetlen más stratégiát sem, és "q" sem. A minimax módszer mégis segített az optimális kevert stratégiák megtalálásában!

Általánosan megfogalmazva a minimax módszert:

$$\max_{j=1..n} \{ \min_{i=1..m} \{ f_{i,j} \} \} = \min_{i=1..m} \{ \max_{j=1..n} \{ f_{i,j} \} \}$$

Az oszlop maximumok minimuma egyenl a sor minimumok maximumával.

**Összefoglalva:**

**Tanulság:**
A fenti példákban nem voltak tiszta stratégiái a játékosoknak, hanem a játékosok észrevéve a jobb lehetségeket váltottak, vagy ellenfelük váltására reagálva tették ugyanezt.
Ez azonban azt feltételezte, hogy a váltás után az ellenfél tartja a megváltoztatott stratégiát, vagyis többször egymás után játszani fogja. Ez egyáltalán nem biztos, st mivel az ellenfél is racionális, és gyzelemre törekszik, nem tudható mikor fog váltani, melyik tétet fogja a következ játékban tenni. Az ilyen típusú játékokat nevezzük kevert stratégiával rendelkez játékoknak. Ezek optimális stratégiáinak megkeresési módszerét mutatjuk be a következ fejezetben.

# A kevert optimális stratégia a játékelméletben

Kevert stratégiának nevezzük azt az esetet amikor a játékosok egyetlen tiszta stratégiát választva nem tudják a lehetséges maximális nyereségüket - vagyis minimális veszteségüket realizálni.

Ehhez véletlen szeren váltogatniuk kell néhány - optimálisan kiválasztott - stratégiát.
Az optimális stratégiák két-két stratégiás esetre történ meghatározására a következ fejezetben ismertetend grafikus alapokon nyugvó módszer alkalmas.
Több stratégia esetén a lineáris programozást hívhatjuk segítségül az optimális váltogatási arány meghatározásához. Ezt egy következ fejezetben ismertetjük.

## A kevert optimális stratégia meghatározása grafikus módszerrel, kétdimenziós feladat esetén

A minimax elv általánosítható. Tegyük meg ezt elször egy két stratégiával rendelkez kevert stratégiájú feladat esetére. Vizsgáljuk a 8. példa redukált kifizetési mátrixát – melyet ugye egy nagyobb dimenziós feladat dominálható stratégiáinak elhagyásával kaptunk.

Vizsgáljuk elször a játék értékének kérdését, mely tiszta stratégiával rendelkez feladatok esetén nem volt kérdéses. (Ez akkor a fizetési mátrixnak az optimális stratégiák keresztezdésében álló számérték volt.)
Most azonban a valószínség számítást kell segítségül hívnunk a játék értékének kiszámításához. Tegyük fel, hogy az I. játékos ¼ ¾ arányban véletlenszerűen váltogatja az „a” illetve „b” stratégiát, a II. játékos pedig csak a „p” tiszta stratégiát alkalmazza. Ezt jelenítjük meg a mátrix melletti oszlopokban.

| **Tétek** | **p** | **q** | *I. játékos stratégia váltogatási arányai* |
|---|---|---|---|
| **a** | 2 | -2 | $x_a = \frac{3}{4}$ |
| **b** | -1 | 4 | $x_b = \frac{1}{4}$ |
| *II. játékos stratégia váltogatási arányai* | $y_p = 1$ | $y_q = 0$ | |

**8.**

Ekkor a játék értéke egyszeren számítható a valószínség számításban megismert várható érték fogalom alapján, mivel ekkor az esetek ¼-ében két egységnyit nyer, ¾-ében pedig egy egységnyit veszít az I. játékos. 40 játék esetén például
$v_{40}$ = 30* (2) + 10*(-1) = 60 – 10 = 50 lesz a nyeresége.
Az egy játékbeli átlagos nyereség pedig v = 50 / 40 = 5/4.
Ezt egyszeren kiszámíthattuk volna a gyakoriságok, vagy valószínségek és az adott esetekben realizálódó kifizetések szorzataként is. (Ez a valószínségszámítás jól ismert várható érték fogalma.)
$v_{kevert1} = \frac{3}{4} * (2) + \frac{1}{4} * (-1) = \frac{(6-1)}{4} = \frac{5}{4}$
Mj: Természetesen a II. játékos "p" tiszta stratégiájára nem ez az I. játékos optimális stratégiája. Fenti számítást csak demonstrációs céllal végeztük el. (A vízszintes játékos optimális stratégiája

természetesen az "a" tiszta stratégia lenne.)

Nézzük ha a II.-es játékos sem tiszta stratégiát alkalmaz. A játék értéke akkor is kiszámítható, ha ismerjük a stratégiák használatának gyakoriságát.
Váltogassa a II. játékos stratégiáit ½ , ½ arányban.

| **Tétek** | **p** | **q** | *I . játékos stratégia váltogatási arányai* |
|---|---|---|---|
| **a** | 2 | −2 | $x_a = \frac{3}{4}$ |
| **b** | −1 | 4 | $x_b = \frac{1}{4}$ |
| *II . játékos stratégia váltogatási arányai* | $y_p =$ | $y_q =$ | |

**8.**

(Mj: Mindig véletlenszeren váltogatott stratégiahasználatról beszélünk, mert ha rendszerszeren váltogatjuk a tételeket arra rájön az ellenfél és kihasználja – mindig a számára bevételt jelentő tétet alkalmazza ellenünk.)

Ekkor

$v_{kevert2}$ = ½ * ¾* (2) + ½ * ¾ * (-2) + ½ * ¼ * (-1) + ½ * ¼ *(4) = $\frac{(6-6-1+4)}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

Ez tulajdonképpen egy kétdimenziós valószínségi eloszlás várhatóértékének számítását jelenti, a perem eloszlások ismeretében. A játék értéke pedig háromnyolcad egység nyereség az I.-es játékos számára.
„Stratégia váltási arányainkat” ( ¼ , ¾ és ½ , ½ ) véletlenszerűen választottuk meg. Bizonyítandó, hogy a kifizetés függ ettl az aránytól, számítsuk ki a II. játékos $y_p$ = ¼ , $y_q$ = ¾ stratégia váltási arányának esetére is a várható kifizetést (vagyis v-t a játék értékét).

| **Tétek** | **p** | **q** | *I . játékos stratégia váltogatási arányai* |
|---|---|---|---|
| **a** | 2 | −2 | $x_a = \frac{3}{4}$ |
| **b** | −1 | 4 | $x_b = \frac{1}{4}$ |
| *II . játékos stratégia váltogatási arányai* | $y_p =$ | $y_q = \frac{3}{4}$ | |

**8.**

$v_{kevert3}$ = ¼ *¾ * (2) + ¾* ¾ * (-2) + ¼ * ¼ * (-1) + ¾ * ¼ *(4) =

$$\frac{(6-3\cdot 3\cdot 2-1+3\cdot 4)}{16} = \frac{(6-18-1+12)}{16} = \frac{-1}{16} = -0,0615$$

Ezzel a változtatással a II. játékosnak sikerült veszteségbl (ha kicsi is de) nyereségessé változtatni a játékot!
Feladatunk tehát ezen váltogatási arányok közül megtalálni azt amely az optimális stratégiát jelenti - mindkét játékos számára. Ehhez hívjuk segítségül a minimax elvet.
Tekintsük – először csak az I.-es játékos „váltogatási arányát" (más szóval kevert stratégiáját) változónak. Legyen ez $x_1$ , $x_2$. Azt ugye tudjuk a valószínségszámításból (illetve józan meggondolásból is), hogy $x_1 + x_2 = 1$ -et kell adjon, mivel ha adott %-ban az els stratégiát alkalmazzuk akkor 100 mínusz annyi százalékban fogjuk a másodikat alkalmazni.
Valószínűségszámítási megfogalmazással „a lehetséges események összege a teljes tér", melynek valószínsége 1.
Tekintsük – mint a legelső számolási példánkban – először azt az esetet amikor a II. játékos tiszta stratégiákat alkalmaz. (Először csak a"p" stratégiát játssza, majd csak az „q"-t.)

| **Tétek** | **p** | **q** | *I. játékos stratégia váltogatási arányai* |
|---|---|---|---|
| **a** | 2 | -2 | $x_a = x_1$ |
| **b** | -1 | 4 | $x_b = x_2 = 1 - x_1$ |
| *II. játékos* "p" *tiszta stratégiája* | $y_p = 1$ | $y_q = 0$ | |

**8.**

Számítsuk ki most a játék értékeit (az elz részekben megismert módon, csak most nem konkrét értékekkel, hanem az I. játékos keverési arányait változóknak ($x_1$ , $1-x_1$)-nek tekintve.

$v_{kevert\ p=1}$ =

$$1\cdot x_1\cdot 2+0\cdot x_1\cdot(-2)+1\cdot x_2\cdot(-1)+0\cdot x_2\cdot 4=2\cdot x_1-1\cdot\left(1-x_1\right)=2\cdot x_1-1+x_1=3\cdot x_1-1=v_p$$

Hasonlóan ha a II. játékos csak a q tiszta stratégiát alkalmazza:

| **Tétek** | **p** | **q** | *I. játékos stratégia váltogatási arányai* |
|---|---|---|---|
| **a** | 2 | -2 | $x_a = x_1$ |
| **b** | -1 | 4 | $x_b = x_2 = 1 - x_1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *II* . *játékos* "q" *tiszta stratégiája* | $y_p = 0$ | $y_q = 1$ | |

**8.**

$v_{\text{kevert q=1}} =$
$0 \cdot x_1 \cdot 2 + 1 \cdot x_1 \cdot (-2) + 0 \cdot x_2 \cdot (-1) + 1 \cdot x_2 \cdot 4 = -2 \cdot x_1 + 4 \cdot (1 - x_1) = -2 \cdot x_1 + 4 - 4 \cdot x_1 = 4 - 6 \cdot x_1$
$= v_q$

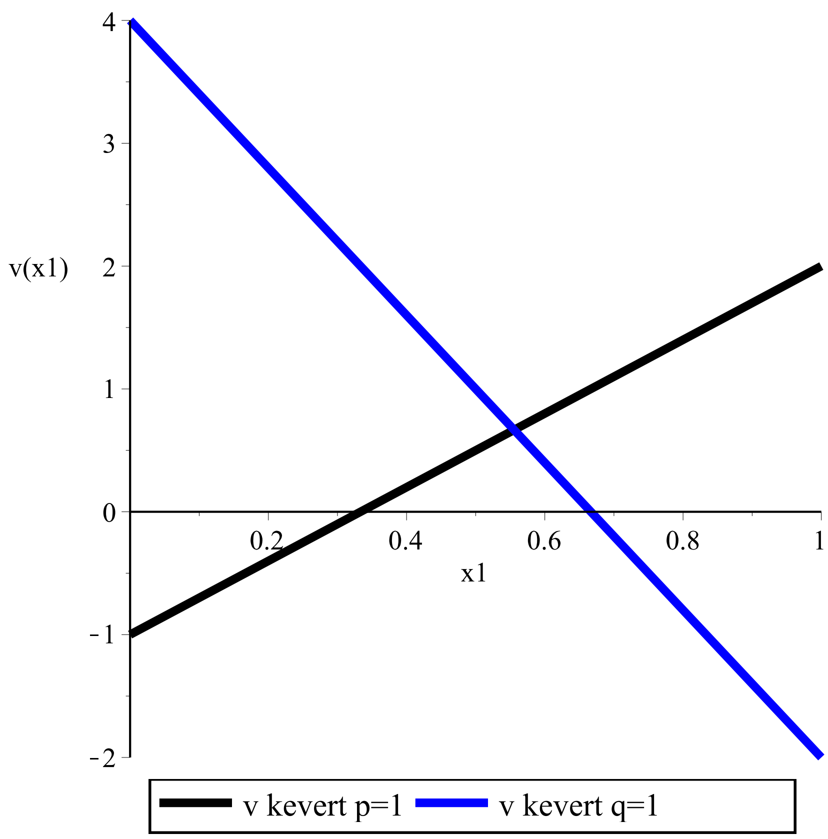
Ábrázoljuk a fenti játék értékeket $x_1$ függvényében, $v_p(x_1)$ –et és $v_q(x_1)$ –et egy grafikonon.

$h1 := 3 \cdot x_1 - 1$ :

$h2 := 4 - 6 \cdot x_1$ :

*Grx1* := *plot*( [*h1*, *h2*], $x_1 = 0 ..1$, *legend* = ["v kevert p=1", "v kevert q=1"], *labels* = ["x1", "v(*x1*)"], *linestyle* = [*solid*, *solid*], *colour* = [*black*, *blue*], *thickness* = [4, 4]) :

*display*(Grx1);



Vizsgáljuk, hogy lerögzítve az I. játékos egy adott keverési stratégiáját a grafikonon látható melyik tiszta stratégia kedvezbb a II. játékos számára!
Például az $x_1 = 0.2$ – es pontban a „p" tiszta stratégia alkalmazása esetén a II játékos egy játékonkénti átlagos nyeresége v=-0.4 (mivel $v_{p, x1 = 0.2} = 2 \cdot 0, 2 - 0, 8$ = -0,4 ) , míg a „q" stratégia alkalmazása esetén 2.8 ($v_{q\,, x2 = 0.8}$ = = 4 - 6*0.25 = 2.8). Vagyis a „p" stratégia előnyösebb számára. (Mivel ő a negatív kifizetéseket kapja!)

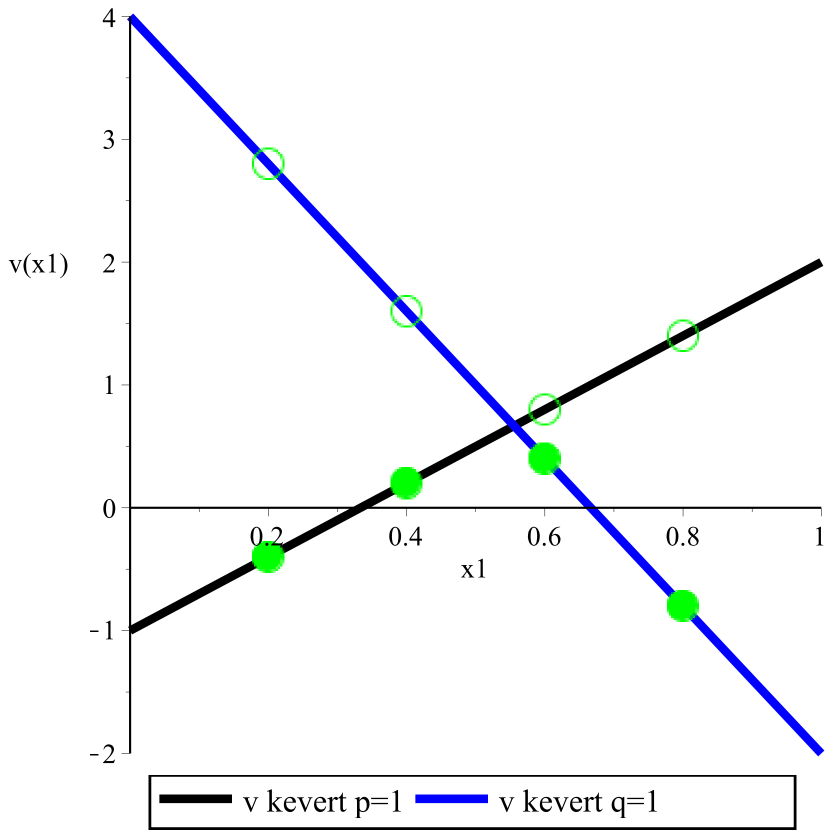
Az $x_1 = 0.8$ –os pontban $v_{p\,, x1 = 0.8}$ = 2*( 0.8) - 0.2 = +1.4 és $v_{q\,, x2 = 0.4}$ = 4 - 6*0.8 = -0,8 vagyis itt is már a "q" stratégia a kedvezőbb.

Kiszámításra került még ugyanez a $x_1 = 0.4$ és $x_1 = 0.6$ pontokban is. Ezen pontok láthatók az alábbi grafikonon.

```
with(plots) :
hx1 := 3·x1 − 1 :
hx2 := 4 − 6·x1 :
Grx1 := plot( [hx1, hx2], x1 = 0 ..1, legend = ["v kevert p=1", "v kevert q=1"], labels = ["x1",
    "v(x1)"], linestyle = [solid, solid], colour = [black, blue], thickness = [4, 4]) :
GrxP11 := pointplot( [0.2 , -0.4], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 30) :
GrxP12 := pointplot( [0.2 , 2.8], color = green, symbol = circle, symbolsize = 30) :

GrxP21 := pointplot( [0.4 , 0.2], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 30) :
GrxP22 := pointplot( [0.4 , 1.6], color = green, symbol = circle, symbolsize = 30) :
GrxP31 := pointplot( [0.6 , 0.8], color = green, symbol = circle, symbolsize = 30) :
GrxP32 := pointplot( [0.6 , 0.4], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 30) :
GrxP41 := pointplot( [0.8 , 1.4], color = green, symbol = circle, symbolsize = 30) :
GrxP42 := pointplot( [0.8 , -0.8], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 30) :

display(Grx1, GrxP11, GrxP12, GrxP21, GrxP22, GrxP31, GrxP32, GrxP41, GrxP42);
```




Ábra 3: Kifizetések változása az I. játékos keverési stratégiája (x1) függvényében

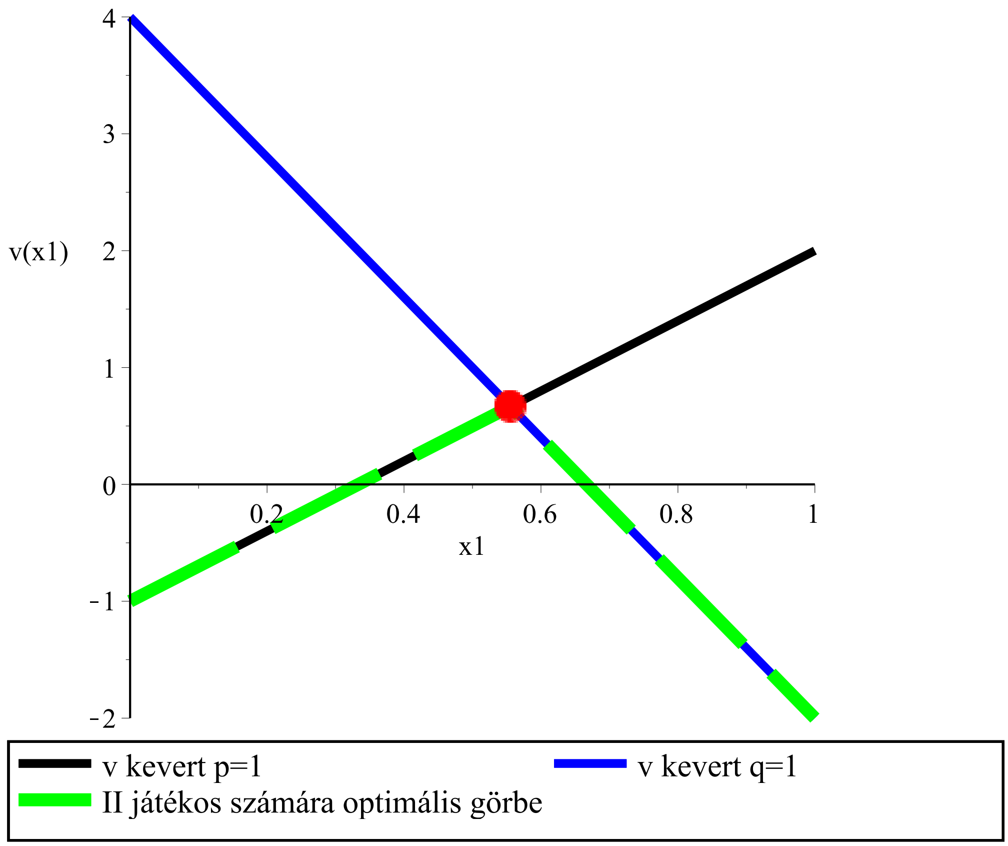
Megállapíthatjuk, hogy az I. játékos bármely keverési stratégiájára megmondható hogy a II. játékos melyik tiszta stratégiája a legkedvezbb. Mivel mindkét játékos racionális (mindkett mindenre egyformán rájön) ezt az I. játékos is tudja. Neki pedig a saját keverési arányának megválasztásában van szabadsága. Ha tudja, hogy a 4. ábrán zölddel kiemelt egyeneseken találhatóak azok a pontok amelyeket ellenfele (a II. játékos) választani fog az különböz keverési stratégiái esetén, akkor a számára legkedvezbb, legnagyobb pozitív kifizetést jelent keverést fogja választani. Ez pedig az egyenesek metszéspontjában van! Ez éppen egy folytonos minimax eljárás, mert a két egyenes közül elször a kisebbet - minimálisat - választottuk, majd ezen görbe maximumát.
Az alábbi ábrán I játékos lehetséges kifizetési egyenese zöld szaggatott vonallal míg az optimális pont a következ ábrán pirossal jelölve.

$$hIOpt := \begin{cases} 3 \cdot x_1 - 1 & x_1 < \frac{5}{9} \\ 4 - 6 \cdot x_1 & x_1 \geq \frac{5}{9} \end{cases} :$$

$Grx2 := plot\left( [h1, h2, hIOpt], x_1 = 0 ..1, legend = [\text{"v kevert p=1"}, \text{"v kevert q=1"}, \text{"II játékos számára optimális görbe"}], labels = [\text{"x1"}, \text{"v(}x1\text{)"}], linestyle = [solid, solid, dash], colour = [black, blue, green], thickness = [4, 4, 6] \right) :$

$GrxP := pointplot\left( \left[ \frac{5}{9}, \frac{3 \cdot 5}{9} - 1 \right], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 30 \right) :$

$display(Grx2, GrxP);$




A játék értéke mint függvény az I. játékos kevert és az II. játékos tiszta stratégiái esetére

A metszéspont kiszámítása egyszer, csak két egyenes metszéspontját a $v_p = v_q$ lineáris egyenletet kell megoldanunk.

$$3 \cdot x_1 - 1 = 4 - 6 \cdot x_1$$
$$9 \cdot x_1 = 5$$
$$x_1 = \frac{5}{9}$$

Az gyenlet megoldása nagyon könnyen megoldható a Maple egyenletmegoldó parancsa segítségével:

$solve(3 \cdot x_1 - 1 = 4 - 6 \cdot x_1, x_1);$

$$\frac{5}{9} \tag{7.1}$$

Tehát $x_1 = \frac{5}{9}$ és $x_2 = \frac{4}{9}$ (Mivel $x_1 + x_2 = 1$)

Tehát az I. játékos optimális kevert stratégiáját az „a” tétnek 5/9 -ed a „b” tétnek pedig 4/9-ed részben történ (véletlenszer!) váltogatása jelenti.
A játék értéke: v = 3*5/9 - 1 = 2/3
Mj: 9 játékból 5-ször "a" tétet kell tennie, négyszer pedig "b"-t a vízszintes játékosnak. 90 játékból ötvenszer "a"-t negyvenszer pedig "b"-t. Természetesen véletlenszeren váltogatva.

Ugyanezen gondolatmenet alkalmazható a függleges játékos optimális kevert stratégiájának meghatározásához is az alábbiakban:

A játék értékeit most az I. játékos „a” és „b” tiszta stratégiái esetére kell kiszámítanunk. Ezt most már egyetlen táblázatban (kifizetési mátrix mellett) jelenítjük meg.

| **Tétek** | **p** | **q** | *I . játékos* "a" *tiszta stratégiája* | *I . játékos* "b" *tiszta stratégiája* |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 2 | -2 | $x_a = 1$ | $x_a = 0$ |
| **b** | -1 | 4 | $x_b = 0$ | $x_b = 1$ |
| *II . játékos kevert stratégiája :* | $y_1$ | $y_2 = 1 - y_1$ | | |

**8.**

$v_{\text{kevert a=1}} =$
$1 \cdot y_1 \cdot 2 + 1 \cdot (1 - y_1) \cdot (-2) + 0 \cdot y_1 \cdot (-1) + 0 \cdot (1 - y_1) \cdot 4 = 2 \cdot y_1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot y_1) = 4\, y_1 - 2 = v_a$

$v_{\text{kevert b=1}} =$
$0 \cdot y_1 \cdot 2 + 0 \cdot (1 - y_1) \cdot (-2) + 1 \cdot y_1 \cdot (-1) + 1 \cdot (1 - y_1) \cdot 4 = -y_1 + 4 \cdot (1 - y_1) = 4 - 5 \cdot y_1 = v_b$

Ismételten grafikonon ábrázolhatjuk a játék értékeit a minimax elvet és az optimális pontot:

$$hIIOpt := \begin{cases} 4 \cdot y_1 - 2 & y_1 \geq \frac{2}{3} \\ 4 - 5 \cdot y_1 & y_1 < \frac{2}{3} \end{cases} :$$

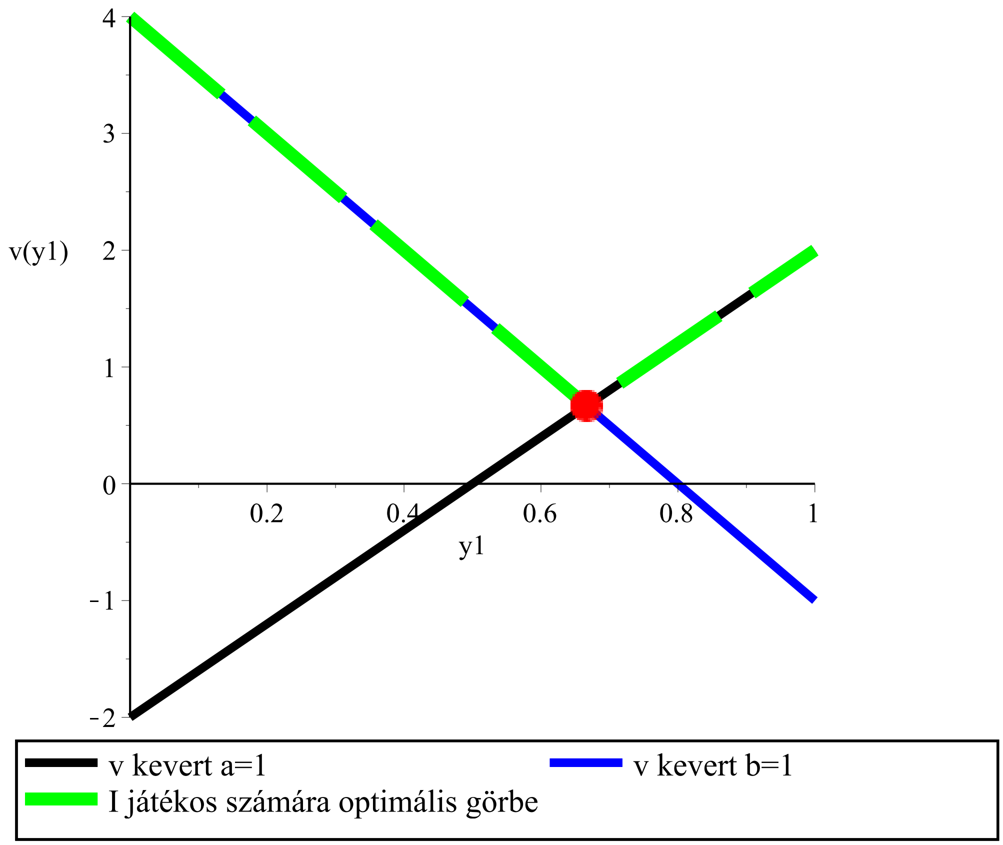
$hy1 := 4 \cdot y_1 - 2 :$

$hy2 := 4 - 5 \cdot y_1$ :

$Gry1 := plot\left( [hy1, hy2, hIIOpt], y_1 = 0 ..1, legend = [$"v kevert a=1", "v kevert b=1", "I játékos számára optimális görbe"$], labels = [$"y1", "v($y1$)"$], linestyle = [solid, solid, dash], colour = [black, blue, green], thickness = [4, 4, 6] \right)$ :

$GryP := pointplot\left( \left[ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 30 \right)$ :

$display(Gry1, GryP);$




A játék értéke a II. játékos kevert és az I. játékos tiszta stratégiái esetére

A gondolatmenet is teljesen azonos:
Ha az y1 = 0.2-es keverési arányt választja a II. játékos akkor az I. játékos a „b" stratégiát választja, mivel akkor pozitív a kifizetés. Ha pedig y1 = 0.8 akkor az „a" stratégiát, mivel ez esetben akkor pozitív a kifizetés. Vagyis az ábrán zöld szaggatottal jelölt grafikon (egyenesek) jelentik a I. játékos optimális tiszta stratégiáit a II. játékos keverési arányainak esetére. A II. játékos optimális keverési arányát pedig - ismételten – az egyenesek metszéspontja adja.

$solve(4\, y_1 - 2 = 4 - 5 \cdot y_1, y_1);$

$$\frac{2}{3} \quad (7.2)$$

Ahonnan: és : $y_1 = \frac{2}{3}$ **és** $y_2 = \frac{1}{3}$

A játék értéke pedig – bármelyik v-ből számítva ,feladatunk eredményét összefoglalva:

$$x_1 = \frac{5}{9} \quad x_2 = \frac{4}{9}$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \quad y_2 = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{2}{3}$$

Vagyis játékonként átlagosan 0.66666 egység (száz játékban 66 egység) nyeresége lesz az I. játékosnak, ha mindketten az optimális kevert stratégiát alkalmazzák.

Fentiekben egy grafikus módszert adtunk két-két stratégiával rendelkez játékelméleti feladat kevert stratégiáinak megadására – illetve olyan feladatokéra, amelyben a dominancia módszer alkalmazása után 2x2-es redukált mátrix adódik.

# Kevert stratégiájú játékok optimális stratégiájának megkeresése lineáris programozás módszerével

Tekintsünk egy - célszeren nem szimmetrikus, most szöveges leírás nélkül megadott - játékot a stratégiák szintén megadott keverési arányával:
Természetesen a keverési arányok pozitívak és összegük 1 vagyis 100%.

| **Tétek** | **γ** | **δ** | **ϵ** | *I játékos egy adott keverési aránya* |
|---|---|---|---|---|
| **α** | 1 | −2 | 2 | $\frac{3}{4}$ |
| **β** | −4 | 5 | −1 | $\frac{1}{4}$ |
| *II. játékos egy ad = ott keverési aránya (stratégiája)* | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | |

**Kevert stratégia 1. példa játék**

Ekkor a játék értéke az alábbi lesz:

$$v_{spec} = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + (-4) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2};$$

$$v_{spec} = \frac{1}{2} \tag{8.1}$$

Ha a vízszintes játékos váltogatási arányait változónak tekintjük akkor a játék értéke ezen arányok $(x_1, x_2)$ függvénye:

$$v_I = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot x_1 + \left((-4) \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot x_2;$$

$$v_\mathrm{I} = x_1 - x_2 \tag{8.2}$$

Ha pedig a függleges játékos váltogatási arányait tekintjük változónak $(y_1, y_2)$:

$$v_{II} = \left(1 \cdot \frac{1}{4} + (-4) \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot y_1 + \left((-2) \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot y_2 + \left(2 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot y_3;$$

$$v_{II} = -\frac{3}{4} y_1 - \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{4} y_3 \tag{8.3}$$

Általános alakban felírva a fizetési mátrixot $F := \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots\ldots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots\ldots. & f_{2,n} \\ . & . & . & . \\ f_{4,1} & f_{4,2} & \ldots\ldots.. & f_{m,n} \end{bmatrix}$ mely ( m x n ) -es,

és a váltogatási arányokat is változónak tekintve

a játék értéke: $v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f_{i,j} \cdot x_i \cdot y_j$ amit a vektor mátrix szorzás ismeretében úgy is írhatunk,

hogy $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{y}}$

A vízszintes játékos szemszögébl felírva és - mivel számára a pozitív, minél nagyobb kifizetések a cél ezért - a játék értékét maximalizálva: $v_I = v_{maxI} = \max_{i=1..m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} \cdot y_j \right\}$ ha $x_1 + x_2 + \ldots. + x_m = 1$ **és** $(y_1, y_2, \ldots., y_n)$ adott rögzített.

A függleges játékos szemszögébl. $v_{II} = v_{minII} := \max_{j=1..n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \sum_{i=1}^{m} f_{i,j} \cdot x_i \right\}$ ha $y_1 + y_2 + \ldots. + y_n = 1$ és $(x_1, x_2, \ldots., x_m)$
adott rögzített.

Mivel az I játékos célja v maximalizálása, míg a II-é v minimalizálása.

**Neumann minimax tétele :**

$$v_I(\underline{x}) \le v_I(\underline{x}_0) = v_{opt} = v_{II}(\underline{y}_0) \le v_{II}(\underline{y})$$

vagyis hogy az els játékos bármely stratégiájából származó játék értéke mindig kisebb vagy egyenl mint az optimális stratégiakor kialakuló játék érték. Hasonlóan a II. játékos bármely stratégiájához tartozó játék értéke nagyobb vagy egyenl a saját optimális stratégiájakor kialakuló játék értékénél. (Vagyis bármelyik ha rosszul, nem az optimális váltogatási aránnyal játszik akkor kevesebb eredményt ér el.)

Vektorosan felírva:

$$\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{y}_0 \le \underline{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{y}_0 \le \underline{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{y}}$$

$v_0 = \underline{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{y}_0$ jelenti az optimális játék értéket. Ekkor a maximumok minimuma megegyezik a minimumok maximumával, vagyis ténylegesen a minimax elvet írtuk fel!
ez azonban nem ad még sajnos megoldási módszert számunkra. Keressük most ezt. Használjuk - a grafikus megoldásnál is alkalmazott - ellenfél tiszta stratégiáinak feltételezését,valamint a többcélú optimalizálásnál alkalmazott legkisebb korlátok módszerét.

Írjuk fel a játék értékét rendre a tiszta stratégiák esetére:

$$v = f_{11} \cdot x_1 + f_{21} \cdot x_2 + \dots\ f_{m1} \cdot x_m \qquad ha \quad y_1 = 1\ ,\ y_2 = 0\ ,\ y_3 = 0\ ,\ \dots\ y_n = 0$$
$$v = f_{12} \cdot x_1 + f_{22} \cdot x_2 + \dots\ f_{m2} \cdot x_m \qquad ha \quad y_1 = 0\ ,\ y_2 = 1\ ,\ y_3 = 0\ ,\ \dots\ y_n = 0$$
$$\dots$$
$$v = f_{1n} \cdot x_1 + f_{2n} \cdot x_2 + \dots\ f_{mn} \cdot x_m \qquad ha \quad y_1 = 0\ ,\ y_2 = 0\ ,\ y_3 = 0\ ,\ \dots\ y_n = 1$$

Alkalmazzunk ezen játék értékekre legkisebb alsó korlátot $v_I$, és - ahogy a többcélú optimalizálásnál tettük - ezt maximalizáljuk. Mivel a vízszintes játékosunknak a játék értékének maximalizálása a célja.
Adjuk még hozzá feladatunkhoz azt a tényt hogy a stratégiák összegének egyet kell adnia valamint, hogy $x_i$ -k pozitívak.

$$f_{11} \cdot x_1 + f_{21} \cdot x_2 + \dots\ f_{m1} \cdot x_m \ge v_I$$
$$f_{12} \cdot x_1 + f_{22} \cdot x_2 + \dots\ f_{m2} \cdot x_m \ge v_I$$
$$\dots$$
$$f_{1n} \cdot x_1 + f_{2n} \cdot x_2 + \dots\ f_{mn} \cdot x_m \ge v_I$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$v_I = \max.$$

az $x_1, x_2, \dots, x_m \ge 0$
feltétel mellett.

Vektorosan felírva ugyanezt:

$$\underline{A}^{T} \cdot \underline{x} \ge \underline{1} \cdot v_I$$
$$\underline{1}^{T} \cdot \underline{x} = 1\ , \qquad \underline{x} \ge 0$$

– – – – – –

$$z = v_I = \max.$$

A függleges játékosra hasonlóan. Mivel a játék értékét minimalizálni kívánja, így az ellenfél tiszta stratégiáira adott játék értékeket adott $v_{II}$
-nél kisebbként használjuk feltételi egyenletként és ezen értéket minimalizáljuk:

$$\underline{\boldsymbol{A}} \cdot \underline{y} \le \underline{1} \cdot v_{II}$$

$$\underline{1}^T \cdot \underline{y} = 1$$

$$------$$

$$z = v_{II} = \min.$$

Láthatóan ezek primál- duál feladatpár szert alkotnak.

## Példa feladatunk optimális stratégiájának megkeresése fenti LP feladat módszerrel:

Fizetési mátrixa: $\underline{F} := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Az els játékosra felírt egyenletek:

$$1 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \ge v_I$$
$$-2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \ge v_I$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 \ge v_I$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

---

$$z = v_I = \max.$$

Megoldását keressük a Maple beépített LP optimalizáló módszerével (Mivel a Szimplex módszerrel hosszadalmas lenne és most már nem célunk a Szimplex módszer gyakorlása.):

$with(Optimization)$ :
$LPSolve\left( v_I, \{x_1 - 4 \cdot x_2 - v_I \ge 0, -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - v_I \ge 0, 2 \cdot x_1 - x_2 - v_I \ge 0, x_1 + x_2 = 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}, maximize \right);$

$$\left[ -0.250000000000000, \left[ v_{\mathrm{I}} = -0.250000000000000, x_1 = 0.750000000000000, x_2 = 0.250000000000000 \right] \right] \tag{8.4}$$

A megoldás: az els stratégia 3/4 a másodiknak pedig 1/4 részben történ - véletlenszer - alkalmazása. Ekkor a játék értéke: -1/4 vagyis a függleges játékosnak van (csekély) nyerési esélye. (4 játékban átlagosan egyet nyer, 40 játékban kb. tízet.)

Az egyenletek a függleges játékos esetére:

$$1 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \le v_{II}$$

$$-4\cdot y_1 + 5\cdot y_2 - 1\cdot y_3 \le v_{II}$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$z = v_{II} = \min.$$

A megoldása a Maple optimalizáló eljárásával:

$LPSolve(\ v_{II}, \{y_1 - 2\cdot y_2 + 2\cdot\ y_3 - v_{II} \le 0, -4\cdot\ y_1 + 5\cdot y_2 -\ y_3 - v_{II} \le 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0\});$

$$[-0.250000000000000, [v_{II} = -0.250000000000000, y_1 = 0.583333333333333, y_2 = 0.416666666666667, y_3 = 0.]] \tag{8.5}$$

A  megoldás: az els stratégia 7/12 a másodiknak pedig 5/12 részben történ - véletlenszer - alkalmazása. A harmadik stratégia nem is vesz részt a játékban. A játék értéke ekkor is  -1/4

Nézzük mégis a Szimplex módszerrel:
(Maple Input ablakban. )
Mivel minimalizálni akartuk Szimplex módszerünk viszont maximum keresésre alkalmas ,ezért írtunk  $-v_{II}$-t.

$$y_1 - 2\cdot y_2 + 2\cdot y_3 - v_{II} \le 0,$$
$$-4\cdot y_1 + 5\cdot y_2 - y_3 - v_{II} \le 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$-v_{II}$$

Az induló Szimplex tábla:

*játékelmInputMixed1*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & v_{II} & y_1 & y_2 & y_3 & b \\ u_1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ u_2 & -1 & -4 & 5 & -1 & 0 \\ um_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

$bazisChange(u_2, y_2),\ bazisChange(um_3, y_1), umTorol(um_3);$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_{II} & y_1 & u_2 & y_3 & b \\ u_1 & -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} & 0 \\ y_2 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ um_3 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & v_{II} & um_3 & u_2 & y_3 & b \\ u_1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ y_2 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ y_1 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & v_{II} & u_2 & y_3 & b \\ u_1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ y_2 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ y_1 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Láthatóan többes alternatív optimuma van a feladatnak. Els megoldása:

$$y_1 = \frac{4}{9} \quad ; \quad y_2 = \frac{5}{9} \quad ; \quad y_3 = 0 \quad ;$$

A további megoldásokat további báziscserékkel kaphatjuk meg:

$$bazisChange(u_1, y_3)\ ,\ bazisChange(y_3, u_2)\ ,\ bazisChange(u_2, y_3)\ ;$$

$$\begin{bmatrix} 3 & v_{II} & u_2 & u_1 & b \\ y_3 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ y_2 & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{18} \\ y_1 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & v_{II} & y_3 & u_1 & b \\ u_2 & -4 & 6 & 3 & 1 \\ y_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ y_1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.8}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & v_{II} & u_2 & u_1 & b \\ y_3 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ y_2 & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{18} \\ y_1 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Melyekrl leolvasható megoldások:

$$y_1 = \frac{4}{9} \quad ; \quad y_2 = \frac{7}{18} \quad ; \quad y_3 = \frac{1}{6} \quad ; \qquad \text{vagy:} \quad y_1 = \frac{2}{3} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad y_3 = 0 \quad ; \qquad \text{vagy:}$$

$$y_1 = \frac{4}{9} \quad ; \quad y_2 = \frac{7}{18} \quad ; \quad y_3 = \frac{1}{6} \quad ;$$

Vagyis ezen feladatnak alternatív optimumai vannak bármelyikkel elérhet az optimális nyereség. Illetve ezek lineáris konbinációjával is! Ezt a Maple megoldó rutinja nem mutatta meg számunkra.

## Tekintsük most a legegyszerűbb „kő-papír-olló” játékot. (Második példajáték)

A minimax elv további általánosítsa ad megoldást problémánkra.
Ismételten tekintsük változónak az I.-es játékos keverési arányait (x1 , x2 , x3 ) és vizsgáljuk ha a II. játékos tiszta stratégiákat használ. (Csak k, csak papír, csak olló téteket alkalmaz.) Ezt jelenítjük meg egy táblázatban a fizetési mátrix mellett:

| **Tétek** | **kő** | **papír** | **olló** | *Keverési arán\ yok* |
|---|---|---|---|---|
| **kő** | 0 | $-1$ | 1 | $x_1$ |
| **papír** | 1 | 0 | $-1$ | $x_2$ |
| **olló** | $-1$ | 1 | 0 | $x_3$ |
| *II . játékos kő stratég\ ia* | 1 | 0 | 0 | |
| *II* | 0 | 1 | 0 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| . *játékos papír stratég\ ia* | | | | |
| *II* . *játékos olló stratég\ ia* | 0 | 0 | 1 | |

**K - papír - olló játék**

Írjuk fel erre is a fent megfogalmazott egyenleteket:

$$v_{I.\,kő} = x_2 - x_3 \geq v_I$$
$$v_{I.\,papír} = -\,x_1 + x_3 \geq v_I$$
$$v_{I.\,olló} = \; x_1 - x_2 \geq v_I$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

---

$$z = v_I = \text{max.}$$

Megoldva Maple segítségével:

$$LPSolve\left( v_I, \{x_2 - x_3 - v_I \geq 0, -\,x_1 + x_3 - v_I \geq 0, x_1 - x_2 - v_I \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}, maximize\right)$$

$$\left[3.44367256932543\ 10^{-10}, \left[v_I = 3.44367256932543\ 10^{-10}, x_1 = 0.333333332988966, x_2 = 0.333333333677701, x_3 = 0.333333333333333\right]\right] \tag{8.9}$$

Vagyis minden egyes stratégiát azonos arányban célszer használni, a játék értéke pedig nulla. (Ezt jelenti az a nagyon picike, tíz a mínusz tizediken nagyságrend) kis szám.)

## Az I. vízszintes játékos optimális stratégiáinak meghatározása Szimplex módszer segítségével:

Szimplex módszerünket azonban csak kisebb egyenls feltételek esetén alkalmazhatjuk, vagyis modellünket elbb át kell alakítani:

$$v_{I.\,kő} = v_I - x_2 + x_3 \leq 0$$
$$v_{I.\,papír} = v_I + x_1 - x_3 \leq 0$$
$$v_{I.\,olló} = \; v_I - x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

---

$$z = v_I = \max.$$

Mj: A Maple input ablakban a $v_I$ nem megjeleníthet ezért használunk helyette "sima" v-t.

$v - x_2 + x_3 \le 0,$
$v + x_1 - x_3 \le 0,$
$v - x_1 + x_2 \le 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$v$

Az induló Szimplex táblára:

*játékelmInputMixed2*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & v & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ u_2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ um_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(8.10)}$$

**A báziscserék:**

Mivel az egyenlséges sorban csupa negatív szám áll így ezt nem választhatjuk báziscsere elemnek. Elször "nem csillagos" sorokban kell választanunk.

$bazisChange(u_2, x_1), bazisChange(u_3, x_2);$

$$\begin{bmatrix} 1 & v & u_2 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ um_4 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & v & u_2 & u_3 & x_3 & b \\ u_1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ um_4 & -3 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & -3 & -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(8.11)}$$

Most már az egyenlséges sorban választhatunk:

$bazisChange\left(um_4, x_3\right), umTorol\left(um_4\right);$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & v & u_2 & u_3 & um_4 & b \\ u_1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_2 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_3 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccccc} 3 & v & u_2 & u_3 & b \\ u_1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_2 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ x_3 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \textbf{(8.12)}$$

Most térhetünk át a z szerinti optimalizálásra ( z*-ot elhagyhatjuk):

$bazisChange\left(u_1, v\right);$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 4 & u_1 & u_2 & u_3 & b \\ v & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ x_1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_2 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ z_1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \textbf{(8.13)}$$

A megoldás:
$bazisSolution(\ );$

$$v = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3} \quad \textbf{(8.14)}$$

$$v = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$$

Vagyis minden stratégiát azonos arányban kell alkalmaznia az I. vízszines játékosnak.

## A függleges játékos optimális stratégiáinak meghatározása:

| Tétek | kő | pap\ír | olló | *I. játék\os kő strat\égia* | *I. játék\os papír straté\gia* | *I. játékos olló stratég\ia* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **kő** | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **papír** | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| **olló** | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *Keveré\si ar\án\yo\k* | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | | | |

**K - papír - olló játék**

Az egyenletek:

$$v_{I.\,kő} = -y_2 + y_3 \le v_{II}$$
$$v_{I.\,papír} = -y_1 - y_3 \le v_{II}$$
$$v_{I.\,olló} = -y_1 + y_2 \le v_{II}$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

---

$$z = v_{II} = \text{min.}$$

## A függleges játékosra vonatkozóan szintén a Szimplex módszer segítségével Maple ablakból beolvasva:

Itt csak a célfüggvényt kell (-1)-el szorozni, hogy Szimplex módszerrel kezelhet alakra hozzuk a feladatot.

$$-y_2 + y_3 - v_{II} \le 0,$$
$$y_1 - y_3 - v_{II} \le 0,$$
$$-y_1 + y_2 - v_{\mathrm{II}} \le 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$-v_{II}$$

Az egyenlséges feltételeinkhez tartozó másodlagos célfüggvény automatikusan generálódik.

Az induló tábla:

*játékelmInputMixed3*( );

$$\begin{bmatrix} 0 & v_{II} & y_1 & y_2 & y_3 & b \\ u_1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ u_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ um_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

**A báziscserék:**
Mivel az egyenlséges sorban csupa negatív szám áll így ezt nem választhatjuk báziscsere elemnek.
Először "nem csillagos" sorokban kell választanunk.

$bazisChange(u_2, y_1), bazisChange(u_3, y_2);$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_{II} & u_2 & y_2 & y_3 & b \\ u_1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ y_1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ um_4 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & v_{II} & u_2 & u_3 & y_3 & b \\ u_1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ y_2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ um_4 & 3 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 3 & -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

Most már választhatunk az egyenlséges sorban (a csillagos sor változóját), majd törölhetjük is:

$bazisChange(um_4, v_{II}), umTorol(um_4);$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & um_4 & u_2 & u_3 & y_3 & b \\ u_1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ y_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ y_2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ v_{II} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ z_1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ zm & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccccc} 3 & u_2 & u_3 & y_3 & b \\ u_1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ y_1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ y_2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ v_{II} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ z_1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{8.17}$$

További báziscsere szükségeltetik:

$bazisChange(v_{II}, y_3);$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 4 & u_2 & u_3 & v_{II} & b \\ u_1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ y_1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ y_2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ y_3 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ z_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{8.18}$$

Eljutottunk az optimális tábláig, melybl a feladat megoldása:

$bazisSolution(\ );$

$$v_{II}=0, y_1=\frac{1}{3}, y_2=\frac{1}{3}, y_3=\frac{1}{3} \tag{8.19}$$

$$y_1=\frac{1}{3}\quad ; \; y_2=\frac{1}{3}\quad ; \; y_3=\frac{1}{3}\quad ; \quad v_{II}=0,$$

Vagyis a függleges játékosnak is azonos arányban kell minden stratégiáját alkalmaznia.

Bármely más fizetési mátrixszal adott feladat a fenti módon modellezhet és optimális stratégiái megkereshetek.

**Nézzünk most egy tetszleges, nem szimmetrikus kevert stratégiával rendelkez példa játékot:**
Melynek fizetési mátrixát máris kiegészítettük a lineáris programozási modell felírásához szükséges sorokkal és oszlopokkal.

| Tétek | p | q | r | s | *I. játékos stratégiái* |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 3 | 5 | −3 | 0 | $x_1$ |
| **b** | −1 | −4 | 0 | 2 | $x_2$ |
| **c** | 7 | 2 | 1 | −5 | $x_3$ |
| *II. játékos* "p" *stratégiája* | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| *II. játékos* "q" *stratégiája* | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| *II. játékos* "r" *stratégiája* | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| *II. játékos* "s" *stratégiája* | 0 | 0 | 0 | 1 | |

**Több dimenziós példa játék**

Azonban tekintsük inkább a függleges játékos stratégiáinak meghatározását:

| Tétek | p | q | r | s | *I. játékos* "a" *stratégiája* | *I. játékos* "b" *stratégiája* | *I. játékos* "c" *stratégiája* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 3 | 5 | −3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **b** | −1 | −4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| **c** | 7 | 2 | 1 | −5 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | | | |

| Keveré\ si ar\ án\ yo\ k | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Több dimenziós példa játék**

**Az egyenletek:**

$$v_{I.a} = 3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 \le v_I$$
$$v_{I.b} = -y_1 - 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_4 \le v_I$$
$$v_{I.c} = 7 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 - 5 \cdot y_4 \le v_I$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

---

$$z = v_{II} = \text{min.}$$

**A Megoldás a Maple beépített LP Solver - ével:**

$with(Optimization)$ :
$LPSolve(\ v_{II}, \{3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 - v_{II} \le 0, -y_1 - 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_4 - v_{II} \le 0, 7 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 - 5 \cdot y_4 - v_{II} \le 0, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0\})$;

$$\left[-0.376237623987408, \left[v_{II} = -0.376237623987408, y_1 = 1.42446122955725\ 10^{-16}, y_2 = 0.227722772359057, y_3 = 0.504950494916531, y_4 = 0.267326732724411\right]\right] \quad \textbf{(8.20)}$$

**Szimplex módszerrel a szokásos Maple eljárásokkal:**

$-v_{II} + 3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 \le 0,$
$-v_{II} - y_1 - 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_4 \le 0,$
$-v_{II} + 7 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 - 5 \cdot y_4 \le 0,$
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$

$-v_{II}$

$játékelmInputMixed4(\ )$;

$$\begin{bmatrix} 0 & v_{II} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & b \\ u_1 & -1 & 3 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ u_2 & -1 & -1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ u_3 & -1 & 7 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ um_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.21}$$

Szimplex módszerel is...

$bazisChange(u_3, y_1), bazisChange(u_2, y_4);$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_{II} & u_3 & y_2 & y_3 & y_4 & b \\ u_1 & -\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{29}{7} & -\frac{24}{7} & \frac{15}{7} & 0 \\ u_2 & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{26}{7} & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} & 0 \\ y_1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 0 \\ um_4 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{12}{7} & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} & \frac{12}{7} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & v_{II} & u_3 & y_2 & y_3 & u_2 & b \\ u_1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{31}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ y_4 & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{26}{9} & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ y_1 & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ um_4 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

$bazisChange(u_1, y_3);$

$\#\ bazisChange(y_4, u_1);$

$$\begin{bmatrix} 3 & v_{II} & u_3 & y_2 & u_1 & u_2 & b \\ y_3 & -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{31}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ y_4 & -\frac{28}{33} & \frac{1}{11} & -\frac{85}{33} & \frac{1}{33} & \frac{8}{11} & 0 \\ y_1 & -\frac{23}{33} & \frac{2}{11} & -\frac{38}{33} & \frac{2}{33} & \frac{5}{11} & 0 \\ um_4 & \frac{21}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{83}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{18}{11} & 1 \\ z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zm & \frac{21}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{83}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{18}{11} & 1 \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

$bazisChange(um_4, v_{II}), umTorol(um_4);$

$$\begin{bmatrix} 4 & um_4 & u_3 & y_2 & u_1 & u_2 & b \\ y_3 & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{29}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \\ y_4 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ y_1 & \frac{23}{63} & \frac{1}{63} & \frac{101}{63} & \frac{8}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{23}{63} \\ v_{II} & \frac{11}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{83}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{11}{21} \\ z_1 & \frac{11}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{83}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{11}{21} \\ zm & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & u_3 & y_2 & u_1 & u_2 & b \\ y_3 & \frac{2}{21} & -\frac{29}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \\ y_4 & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ y_1 & \frac{1}{63} & \frac{101}{63} & \frac{8}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{23}{63} \\ v_{II} & -\frac{5}{21} & \frac{83}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{11}{21} \\ z_1 & -\frac{5}{21} & \frac{83}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{11}{21} \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$bazisChange(y_1, y_2);$

$$\begin{bmatrix} 5 & u_3 & y_1 & u_1 & u_2 & b \\ y_3 & \frac{11}{101} & \frac{87}{101} & -\frac{13}{101} & \frac{2}{101} & \frac{51}{101} \\ y_4 & -\frac{12}{101} & -\frac{49}{101} & \frac{5}{101} & \frac{7}{101} & \frac{27}{101} \\ y_2 & \frac{1}{101} & \frac{63}{101} & \frac{8}{101} & -\frac{9}{101} & \frac{23}{101} \\ v_{II} & -\frac{28}{101} & -\frac{249}{101} & -\frac{22}{101} & -\frac{51}{101} & -\frac{38}{101} \\ z_1 & -\frac{28}{101} & -\frac{249}{101} & -\frac{22}{101} & -\frac{51}{101} & -\frac{38}{101} \\ zm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*bazisSolution*( );

$$v_{II} = -\frac{38}{101}, y_1 = 0, y_2 = \frac{23}{101}, y_3 = \frac{51}{101}, y_4 = \frac{27}{101} \tag{8.26}$$

Vagyis a megoldás:

$$v_{II} = -\frac{38}{101} \quad ; \quad y_1 = 0, y_2 = \frac{23}{101}, y_3 = \frac{51}{101}, y_4 = \frac{27}{101};$$

Mely megegyezik a Maple Solver megoldásával!

$$\left[v_{II} = -0.376237623987408, y_1 = 1.42446122955725\ 10^{-16}, y_2 = 0.227722772359057, y_3 = 0.504950494916531, y_4 = 0.267326732724411\right]$$

**Összefoglalva:**

# Összefoglalás:

A játékelmélet nemcsak korszer élvezetes alkalmazási lehetsége a lineáris programozási témakörben tanultaknak - ugyan ez elsre meglepnek tnik, hogy egy olyan játék például mint a k-papír-olló lineáris programozással modellezhet.
Anyagunkban elször példákon igyekszünk bemutatni az alapfogalmakat, melyeket javaslunk élesben játszani is, mivel ez segít (ráadásul élvezetesen) rögzíteni az ismeretéket.

A definíciók - mint kétszemélyes zérus összeg játék, fizetési mátrix, tiszta stratégia, optimális stratégia, fizetési mátrix - az alapfeltevések (mindkét játékos racionális azaz maximálisan okos, és mindkett nyerésre játszik) után a módszerek következtek.
Úgy mint:

**Dominancia módszere** - mely az adott fél által biztosan nem játszott (mivel elnytelenebb) stratégiák törlését jelenti, mégpedig úgy hogy ezt mindkét fél figyelembe veszi - mivel mindkett racionális.

**Minimax módszer** - mely a veszteség minimalizálás elvén választja ki a számunkra legkevésbé elnytelen tiszta stratégiát. Hasonlóan a másik játékosra is, mely nyeregpont javaslat is egyben - vagyis a sorok minimumának maximuma és az oszlopok maximumának minimuma. A nyereg pont olyan pont ahonnan egyik játékos sem kíván kilépni, mert mindegyik kevesebbet nyerne, vagy többet veszítene.

**Kevert stratégiák meghatározása grafikus módszerrel kétdimenziós fizetési mátrix esetére**. Mely tulajdonképpen a minimax elv alkalmazása folytonos esetre. Folytonosan változtatható a játékosok keverési aránya, melyet úgy keresünk, hogy rendre az ellenfél lehetséges tiszta stratégiáit tekintjük. Ezek grafikonon történ ábrázolása után feladatunk egyszer, mert csak két lineáris egyenlet metszéspontját kell meghatároznunk.

**Az optimális stratégiák meghatározása lineáris programozás segítségével** - mely Neumann János általános minimax tételén alapul. Felírható mind a vízszintes mind a függleges játékos keverési arányaira és a játék értékére két - egymás duáljaként értelmezhet LP feladat. Ezek megoldása megadja - bármely, tehát akár tiszta stratégiával rendelkez játék esetére is - a játékok optimális keverési arányait.

Az elkészül eljárások a játékelmélet interaktív moduljában használhatók hatékonyabban, mivel az csak ezeket ( az elméleti fejtegetéseket nem) tartalmazza.
Sikerült adott fizetési mátrixból automatikusan generálni (A Neumann tételen alapuló) LP modellt és ennek automatikus megoldását is. Azonban sajnos nem eljárásként csak (enterrel) futtatható parancs együttesként.Ez az elméleti részben nem szerepel.

# Feladatbank

1) Vizsgálja meg, hogy a dominancia módszer alkalmas-e az alábbi fizetési mátrixszal adott feladat optimális stratégiájának meghatározására!
Adja meg a mindkét fél számára legelnyösebb stratégiát!

| Tétek | *I.* | *II.* | *III.* | *IV.* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | 6 | 2 | 2 | 3 |
| *b* | 1 | 0 | −1 | 4 |
| *c* | −1 | 2 | −2 | 1 |

**1. feladat**

2) Határozza meg, hogy van-e nyeregpontja az alábbi kétszemélyes játéknak, s ha van ez a nyeregpont stabilis-e! Tisztességes-e a játék?

| Tétek | *p* | *q* | *r* | *s* | u | v |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 4 | 3 | −2 | 3 | −2 | 4 |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *b* | 2 | 2 | −3 | 4 | −3 | 2 |
| *c* | −1 | 3 | −1 | 6 | −1 | −1 |

**2. feladat**

3.) Határozza meg, hogy van-e nyeregpontja az alábbi kétszemélyes játéknak, s ha van ez a nyeregpont stabilis-e! Tisztességes-e a játék?

| Tétek | *p* | *q* | *r* | *s* | v |
|---|---|---|---|---|---|
| *I.* | 5 | 3 | −2 | 3 | 4 |
| *II.* | 1 | 3 | −3 | 4 | 2 |
| *III.* | −1 | 2 | −1 | 6 | −1 |

**3. feladat**

4.) A dominancia módszerével redukálja az alábbi kétszemélyes játékok fizetési mátrixát!

| Tétek | *p* | *q* | *r* | *s* |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 4 | 3 | −2 | 3 |
| 2. | 2 | 2 | −3 | 4 |
| 3. | −1 | 3 | −1 | 6 |
| 4. | 4 | 3 | −1 | 6 |
| 5. | 2 | −1 | −1 | 0 |

**4. feladat**

5.)Minimax módszerrel határozza meg az alábbi kétszemélyes játékok nyeregpont gyanús pontjait, és vizsgálja ezek stabilitását. Amennyiben kevert optimális stratégiát talál, grafikus módszerrel határozza meg!

| Tétek | *p* | *q* |
|---|---|---|
| 1. | 4 | 3 |
| 2. | 2 | 2 |
| 3. | −1 | 3 |
| 4. | 4 | 3 |

**5. feladat**

6.) kétszemélyes játék fizetési mátrixa az alábbi mátrixát!

| Tétek | *p* | *q* | *r* | *s* |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 11 | 3 | −2 | 3 |
| 2. | 1 | −2 | 4 | 4 |
| 3. | −1 | 3 | −1 | −6 |

**6. feladat**

a, Alkalmas-e a dominancia módszer a feladat optimális stratégiáinak meghatározására ?
b, Adja meg a mindkét fél számára legelnyösebb stratégiát!

7.)Egy kétszemélyes játék fizetési mátrixa az alábbi:
Adja meg a mindkét fél számára legelnyösebb stratégiát! Tisztessége-e a játék?

| Tétek | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* |
|---|---|---|---|---|---|
| *aa* | −2 | −3 | 3 | 5 | −3 |
| *bb* | 0 | 4 | 1 | 2 | 0 |
| *cc* | −1 | −3 | 2 | −1 | −3 |

**7. feladat**

8.) Adja meg az alábbi fizetési mátrix-szal megadott a játékelméleti feladat optimális stratégiáit!

| Tétek | *dd* | *ee* | *ff* | *gg* | *hh* |
|---|---|---|---|---|---|
| *cc* | 1 | −3 | 3 | 5 | −3 |
| *bb* | 0 | 2 | 1 | 3 | 0 |
| *aa* | −2 | −2 | 4 | −1 | −3 |

**8. feladat**

9.) A dominancia módszerével redukálja az alábbi kétszemélyes játék fizetési mátrixát! Grafikus módszerrel határozza meg a mindkét fél számára legelnyösebb stratégiákat!

| **Tétek** | **pap\ ucs** | **cipő** | **csiz\ ma** | **mam\ u** | **zok\ ni** |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | sz | |
|---|---|---|---|---|---|
| **kal\ ap** | 1 | -3 | 3 | 5 | -3 |
| **sap\ ka** | 0 | 2 | 1 | 3 | 0 |
| **ken\ dő** | -2 | -2 | 4 | -1 | -3 |

**9. feladat**

10.) Adja meg az alábbi fizetési mátrixszal adott játék elméleti feladatnál a játékosok stratégiáit, és a játék értékét! Tisztességesek-e a játékok?

| Tétek | papucs | cipő |
|---|---|---|
| **kalap** | 1 | -3 |
| **sapka** | 0 | 2 |

**10. feladat**

11.) Határozza meg az alábbi fizetési mátrixokkal adott kétszemélyes játékok optimális kevert stratégiáit!

| Tétek | piros | sárga |
|---|---|---|
| **esernyő** | -11 | 4 |
| **kabát** | 22 | -2 |

**11. feladat**

12.) Egy diák az egyetemen logikai játékok pénzre történ játszásával egészíti ki jövedelmét. Egyszer az alábbi új „páros – páratlan „ játékot ajánlja hasonló beállítódású társának: A játékban egyszerre egymástól függetlenül tegyenek 1 től n ig terjedő számokat. Ha a számok különbsége páratlan a „ páratlan” játékos nyer annyit amennyi a különbség volt. Ha a különbség páros akkor a „páros” játékos nyer szintén a különbségnek megfelel összeget.

- a.) Írja fel ezen kétszemélyes játék fizetési mátrixát egytl ötig terjed tétek esetére!
- b.) Milyen struktúrájú az így kapott mátrix?
- c.) Alkalmas-e a mini-max, vagy a dominancia módszer az optimális stratégiák meghatározására?

13.) Egy egyszerűsített stratégiai játékban csak négy fajta figurával lehet „harcba szállni”, melyeknek értékei rendre: honvéd: 1, tábornok: 5 , kém: 3 és bomba: 2. A játékot úgy játsszák, hogy mindkét játékos harcba küld egy-egy álcázott figurát. (Vagyis nem lehet tudni mely bábu mögött milyen érték figura található.) Találkozáskor felfedik magukat és a szabályoknak megfelelen amelyik fél gyzedelmeskedik az a csapat lesz gazdagabb a legyzött ellenfél pontszámának értékével. A tzszerészt mindenki legyzi csak a bombát képes hatástalanítani. A tábornok a bombát nem is meri fel, ellene veszít, de mindenkit mást legyz. A honvéd csak a tzszerész ellen gyzedelmeskedik, a bombát pedig csak a tzszerész képes hatástalanítani.

□ Elemezze ezt a kétszemélyes játékot! Megtudja-e adni a mindkét fél számára optimális stratégiát? Van-e a játéknak nyeregpontja, stabilis-e? Tisztességes-e a játék?

14.) Egy matematikushallgató az egyetemen logikai játékok pénzre történ játszásával egészíti ki jövedelmét. Egyszer az alábbi új kétszemélyes „ABC” játékot ajánlja hasonló beállítódású társának:

□ Mindkét játékosnak az ABC valamely betjét kell mondania. Aki olyan bett mond amely a betk ABC sorrendjében magasabb helyet foglal el az kap a másiktól annyi Ft-ot ahánnyal nagyobb sorszámú bett mondott. (Pl. Ha az I. játékos: B-t, a II. Játékos pedig C-t mond akkor a II. . játékos 1 Ft-ot kap az I.-tl.)

□ - Lássa be , hogy ez kétszemélyes zérusösszeg játék!

□ - Írja fel a fizetési mátrixát ha csak az ABC els három betje lehet a tét!

□ - Adja meg mindkét fél optimális stratégiáját!

□ - Vizsgálja meg, hogy tud-e nyerni rajta a matematikus hallgató?

15.) Egy gyakorló terapeuta azt találta, hogy az autista gyermekekre nagyon jó hatással volt kétszemélyes társasjátékok játszása. Ezért a nagyon kiskorúak számára a foglalkoztatóban található számos hiányos magyar kártya paklikkal játszható, egyszer kétszemélyes kártyajátékot talált ki.

□ Az egyik játékos a magyar kártya nem számos lapjait (alsó, fels, király és az ász is) a másik pedig a számozott lapokból a 7,8,9,10 lapokat kapja. Mindkét játékos elkészít egy lefordított lapot, melyet egyszerre fordítanak fel. Ha 7-es alsóval, 8-as felsvel vagy király 9-essel találkozik az döntetlent jelent. Az alsó 8-as ellen kett, 9-es ellen három tízes ellen két forintos veszteséget jelent. A fels a 7-es és a 10-es ellen egy forint nyereséget szenved a 9-estl viszont 2 Ft-os veszteséget szenved. A király a 7-est 3 a 8-ast és a 10-est pedig két forinttal veri. Az ász tét 1-Ft-os nyereséggel zár a 7-es és 2 Ft-os –sal a 8-as ellen, míg 2 Ft –os vesztséget jelent a 9-es ellen, és 3 Ft-osat a 10-es ellen.

□ Jellemezze ezt a kétszemélyes játékot! Milyen stratégiákat érdemes a játékosoknak alkalmazniuk? Tisztességes-e? Mindkét fél legjobb stratégia választása esetén unalmas-e? Mennyi a játékosok egy játékbeli átlagos várható nyeresége?

16) Henrik és Frigyes két Fekete Holló Egyesületi tag egyetemista kitalálta, hogy a következ módon versenyeznek egy lány kegyeiért: a tíz napos mindszenti edztábor minden napján dárdával vagy buzogánnyal (és pajzsokkal) ütközeteket vívnak. Mivel mindkettjük számára köztudott, erviszonyuk így minden küzdelem eltt borítékolják, hogy az adott napon ki milyen fegyvernemet választ. Azonos fegyvernemek esetén Henrik jobb, dárda esetén két buzogány esetén 3 találattal, azonban ha Henrik küzd dárdával, Frigyes pedig buzogánnyal akkor Frigyes gyz egy találattal, illetve ha Henrik buzogánnyal és Frigyes pedig dárdával, akkor viszont négy találattal jobb Frigyes!

Melyikkőjüknek kell lemondania arról, hogy „ráhajtson” a lányra, ha nemcsak a harcművészetekhez, de a matematikához is egyformán jól értenek? Mekkora összesített találati arány várható a 10 napos edztábor végére?

# Programok